

境界関数を用いた B-spline Ritz 法による不均質長柱の線形座屈問題の解析

大分工業高等専門学校 学生会員 ○甲 斐 杏 子
大分工業高等専門学校 正 会 員 名 木 野 晴 暢

大分工業高等専門学校 学生会員 新 宮 百 恵
豊 橋 技 術 科 学 大 学 非 会 員 足 立 忠 晴

1. はじめに

線形化された梁-柱理論に基づく不均質な長柱 (領域 $\Omega = (0, L)$) の線形座屈問題の支配方程式は,

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} \left\{ K(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right\} + N(x) \frac{dw(x)}{dx} \right] = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (1)$$

ただし, $K(x) = E(x) I(x)$ は長柱の x 軸に沿って変化する曲げ剛性, $E(x)$ と $I(x)$ は, それぞれ, ヤング率と中立軸まわりの断面二次モーメントであり, $N(x)$ は圧縮荷重によって長柱の内部に生じている x 軸方向の合応力である. $E(x)$ と $I(x)$ は設計変数であるが, 特に, 任意の $E(x)$ に対して解析的な解を得ることは困難であろう. これまでに FEM, DQEM, LDQM や B-spline Ritz 法などにより解析され, 本問題に適した数値解析法に関する議論がなされている¹⁾.

山本ら¹⁾の B-spline Ritz 法は先行研究よりも少ない自由度で高い解析精度が得られている. 文献 1) は基本境界条件の処理に仮想ばね法を用いているが, 試行関数は許容であることが望ましい. そこで, B-spline 基底関数に境界関数を乗じることで許容な試行関数を定義した. 境界関数は, 基本境界条件のみを満足する関数 $f(x)$ と基本境界条件と自然境界条件の両方を満足する関数 $g(x)$ の二つを設定した. 本稿では, この許容な試行関数を用いることによる数値解の収束性, 数値安定性および解析精度の改善効果を調べたので報告する.

2. 研究方法

本稿では, 等断面を有する片持長柱の線形座屈問題を対象とし, 均質材料 ($E(x) = E$) と文献 1) と同様の不均質材料について数値実験を行う. この二つの例題は厳密解²⁾を求めることが可能であるため, 座屈荷重 (固有値) とこれに対応する座屈モード (固有関数) の解析精度を正確に評価することができる. 本研究の結果と文献 1) の結果を比較することで, 境界関数 $f(x)$, $g(x)$ を用いることによる数値解の収束性および解析精度の改善効果を調べる.

3. 境界関数と許容な試行関数

片持長柱の境界条件式を面外たわみ w で表すと,

$$w=0 \quad \text{and} \quad \frac{dw}{dx}=0 \quad \text{on } x=0. \quad (2)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2}=0 \quad \text{and} \quad \frac{d}{dx} \left(-EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = 0 \quad \text{on } x=L. \quad (3)$$

変分原理に基づく Ritz 法では, 少なくとも基本境界条件を満足する変位を仮定すればよい. まず, 基本境界条件 (すなわち式(2)) のみを満足する境界関数 $f(x)$ を最大値が 1 になるように多項式で求めると,

$$f(x) = \left(\frac{x}{L} \right)^2. \quad (4)$$

更に, 基本境界条件と自然境界条件 (すなわち, 式(2)と式(3)) の両方を満足する境界関数 $g(x)$ を最大値が 1 になるように多項式の形式で求めると,

$$g(x) = \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{x}{L} \right)^4 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right\}. \quad (5)$$

文献 1) では, 長柱の w を次式のような許容でない試行関数で近似しているため, 式(2)と式(3)を満足しない.

$$w(x) \cong \sum_{i=1}^{i_x} A_i N_{i,p_x}(x). \quad (6)$$

本研究では, 式(6)に境界関数を乗じることで試行関数を許容にする. $f(x)$ を用いたときを形式的に表すと,

$$w(x) \cong f(x) \sum_{i=1}^{i_x} A_i N_{i,p_x}(x). \quad (7)$$

式(7)の次数は式(6)のそれよりも高くなるため, 数値計算に何らかの影響を与えるものと推察される.

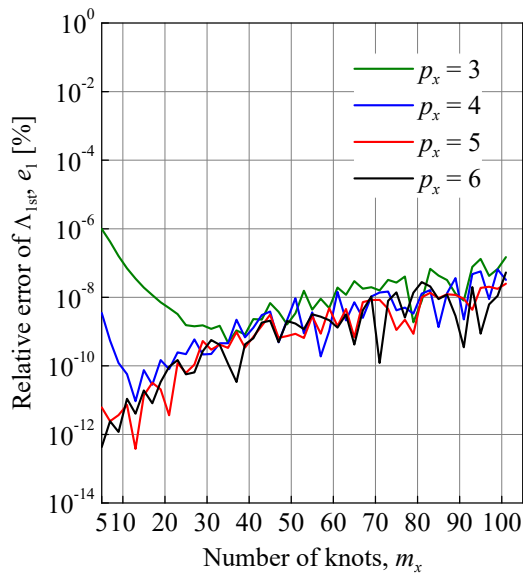
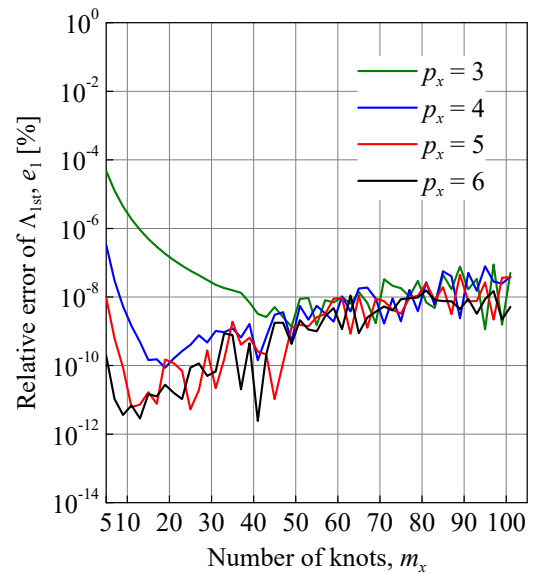
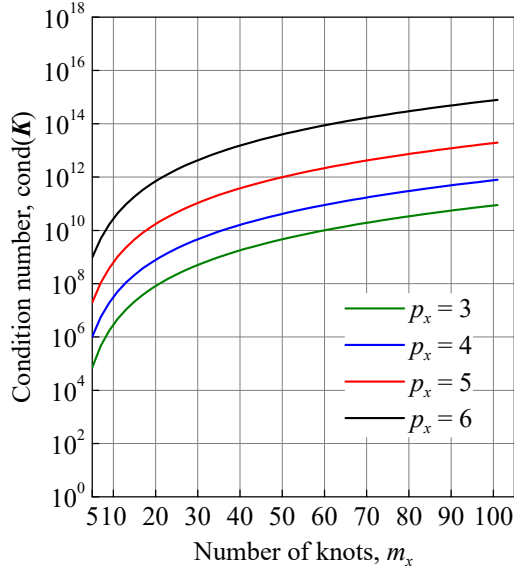
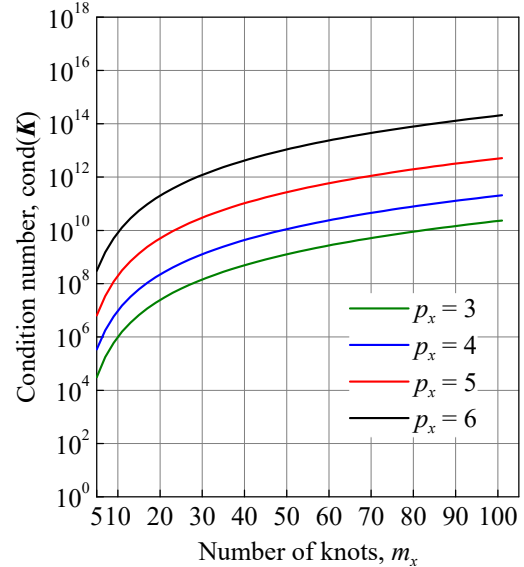
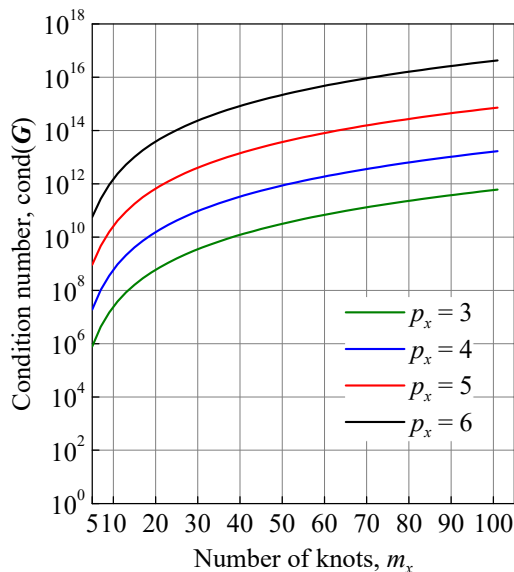
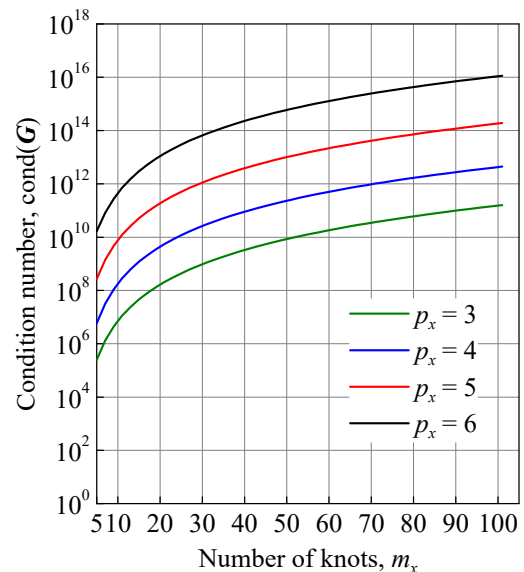
4. 数値実験および考察

まず, 片持均質長柱を対象として調査を行った. 図-1 は片持均質長柱の座屈荷重 Λ_{1st} の厳密解に対する相対誤差 e_1 [%] に与える離散化パラメータ (ノットの数 m_x と spline 次数 p_x) の影響である. 同図の(a)と(b)は, それぞれ, $f(x)$, $g(x)$ を用いたときの結果である. 概ね m_x が 40 以下の範囲で(a)と(b)の相違が認められる. 次に, 片持均質長柱の剛性行列 $\mathbf{K}$ と幾何剛性行列 $\mathbf{G}$ の条件数を指標として図-1 と同様の検討を行った. その結果を図-2 と図-3 に示す. 係数行列の条件数は $f(x)$ よりも $g(x)$ の方が小さな値を示しており, これが図-1 の結果に影響していると考えられる.

文献 1) との比較および不均質長柱の調査結果については, 当日報告する.

参考文献

- 1) 山本ら: 土木構造・材料論文集, 37 (2021) (登載決定).
- 2) Xiao and Li: Mech. Res. Commun., 101 (2019), 103414.

(a) 境界関数 $f(x)$ (二次多項式)(b) 境界関数 $g(x)$ (四次多項式)図-1 片持均質長柱の Λ_{1st} の厳密解に対する相対誤差 e_1 に与えるノットの数 m_x と spline 次数 p_x の影響(a) 境界関数 $f(x)$ (二次多項式)(b) 境界関数 $g(x)$ (四次多項式)図-2 片持均質長柱の剛性行列の条件数 $\text{cond}(\mathbf{K})$ に与えるノットの数 m_x と spline 次数 p_x の影響(a) 境界関数 $f(x)$ (二次多項式)(b) 境界関数 $g(x)$ (四次多項式)図-3 片持均質長柱の幾何剛性行列の条件数 $\text{cond}(\mathbf{G})$ に与えるノットの数 m_x と spline 次数 p_x の影響