

変断面均質弾性棒の縦自由振動問題の p -Ritz 解析の計算精度に関する一考察

大分工業高等専門学校 正 会 員 ○名 木 野 晴 暢
豊 橋 技 術 科 学 大 学 非 会 員 足 立 忠 晴

1. 本研究の目的

構造・材料の合理的設計の観点から変断面傾斜機能材料の振動問題や座屈問題の研究がなされるようになった。これらの問題は、変数係数を有する偏微分方程式の初期値・境界値問題を解くことに帰着する。本問題の解析的な正解が得られることは稀であるため、強形式または弱形式を近似的に解く離散化手法が提案され、その妥当性についての議論がなされている。

本研究の目的は変断面傾斜機能材料の振動問題において、低計算コストで高精度な Ritz 解を得ることができる許容な試行関数を調査することである。本稿では、まず厳密解^{1),2)}を得ることができる変断面を有する均質弾性棒の縦自由振動問題を例題とした。この問題をべき関数と境界関数との積を基底とする p -Ritz 法により解析し、近似解の精度と係数行列の性質を指標として、べき関数による基底の適用性について考察した。

2. 数学モデル (強形式)

物理空間の領域 $\Omega=(0, L)$ 、時間区間 $J=(0, \infty)$ および空間領域の境界 $\Gamma=\{0, L\}$ とする断面積が変化する均質の弾性棒の非減衰の縦自由振動問題を考える。

空間 x により変化する断面積 $A(x)$ は時間 t に依存しないとし、棒は角速度 ω (rad/s) で調和振動するとすれば、時間依存性を消去した振幅変位 $U(x)$ に関する支配方程式は、次のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) \frac{dU(x)}{dx} \right] - \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 A(x) U(x) = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (1)$$

ここで、 $c_0=(E/\rho)^{1/2}$ は、細長い棒の縦波の伝播速度である。時間依存性を消去した境界条件は、

$$U=\bar{U} \quad \text{on } \Gamma_U, \quad (2)$$

$$n_x N = \bar{N} \quad \text{on } \Gamma_N. \quad (3)$$

ただし、 $\Gamma_U \cup \Gamma_N = \Gamma$ 、 $\Gamma_U \cap \Gamma_N = \emptyset$ であり、 Γ_U は振幅変位が規定される境界、 Γ_N は外力 (合応力) が規定される境界を意味する。また、 n_x は棒の境界に立てた外向き法線方向余弦の x 方向成分であり、 $\bar{U}$ と $\bar{N}$ は、それぞれ、境界での振幅変位と外力の既知量である。

3. 強形式と等価な変分原理 (弱形式)

振幅変位 $U(x)$ は与えられた問題の基本境界条件を満足する許容な関数であるとすれば、変断面均質弾性棒が非減衰の縦自由振動するときの汎関数 $\Pi(U)$ は、次のように表される。

$$\Pi = \int_0^L \frac{EA(x)}{2} \left\{ \frac{dU(x)}{dx} \right\}^2 dx - \int_0^L \frac{\rho \omega^2 A(x)}{2} U^2(x) dx. \quad (4)$$

汎関数の停留条件 $\delta \Pi(U) = 0$ から、振幅変位 $U(x)$ に関する積分形式の方程式が得られる。これを満足する変関数 $U(x)$ は、強形式の弱解である。

4. p -Ritz 法による離散化された代数方程式

p -Ritz 法では、式(4)の汎関数 Π の変関数 $U(x)$ を近似する許容な試行関数 $\hat{U}(x)$ を次のように仮定する。

表-1 両端自由な等断面均質弾性棒の縦自由振動問題の数値安定性と計算精度の改善効果： $\mu=10$

N	$(\bar{K} - \lambda^2 I) a = 0, \quad \bar{K} = M^{-1} K$		$(\tilde{K} - \tilde{\lambda}^2 M) a = 0, \quad \tilde{\lambda}^2 = \lambda^2 + \mu, \quad \tilde{K} = K + \mu M$	
	λ_2	λ_3	λ_2	λ_3
2	$3.46410161513775 \times 10^0$	-	$3.46410161513775 \times 10^0$	-
3	$3.46410161513775 \times 10^0$	$7.74596669241479 \times 10^0$	$3.46410161513775 \times 10^0$	$7.74596669241479 \times 10^0$
4	$3.14246678645259 \times 10^0$	$7.74596669241481 \times 10^0$	$3.14246678645287 \times 10^0$	$7.74596669241484 \times 10^0$
5	$3.14246678643375 \times 10^0$	$6.30593914425026 \times 10^0$	$3.14246678645288 \times 10^0$	$6.30593914422403 \times 10^0$
6	$3.14159306951501 \times 10^0$	$6.30593914365224 \times 10^0$	$3.14159306831378 \times 10^0$	$6.30593914422707 \times 10^0$
7	$3.14159306440933 \times 10^0$	$6.28329033507842 \times 10^0$	$3.14159306831377 \times 10^0$	$6.28329033572122 \times 10^0$
8	$3.14159252877303 \times 10^0$	$6.28328696439028 \times 10^0$	$3.14159265364306 \times 10^0$	$6.28329033572091 \times 10^0$
9	$3.14159119643448 \times 10^0$	$6.28322636840776 \times 10^0$	$3.14159265364309 \times 10^0$	$6.28318545230077 \times 10^0$
10	$3.14189427940075 \times 10^0$	$6.28011977812749 \times 10^0$	$3.14159265358979 \times 10^0$	$6.28318545232192 \times 10^0$
11	$3.13829987633745 \times 10^0$	$5.33694540114211 \times 10^0$	$3.14159265358979 \times 10^0$	$6.28318530725776 \times 10^0$
Exact	$3.14159265358979 \times 10^0$	$6.28318530717959 \times 10^0$	$3.14159265358979 \times 10^0$	$6.28318530717959 \times 10^0$

Note: $(\bar{K} - \lambda^2 I) a = 0$ は標準固有値問題 (改善前) であり、 $(\tilde{K} - \tilde{\lambda}^2 M) a = 0$ は一般固有値問題 (改善後) である。また、第一固有値 ($\lambda_1 = 0$) は省略した。 λ_2 は逆対称一次振動であり、 λ_3 は対称一次振動である。

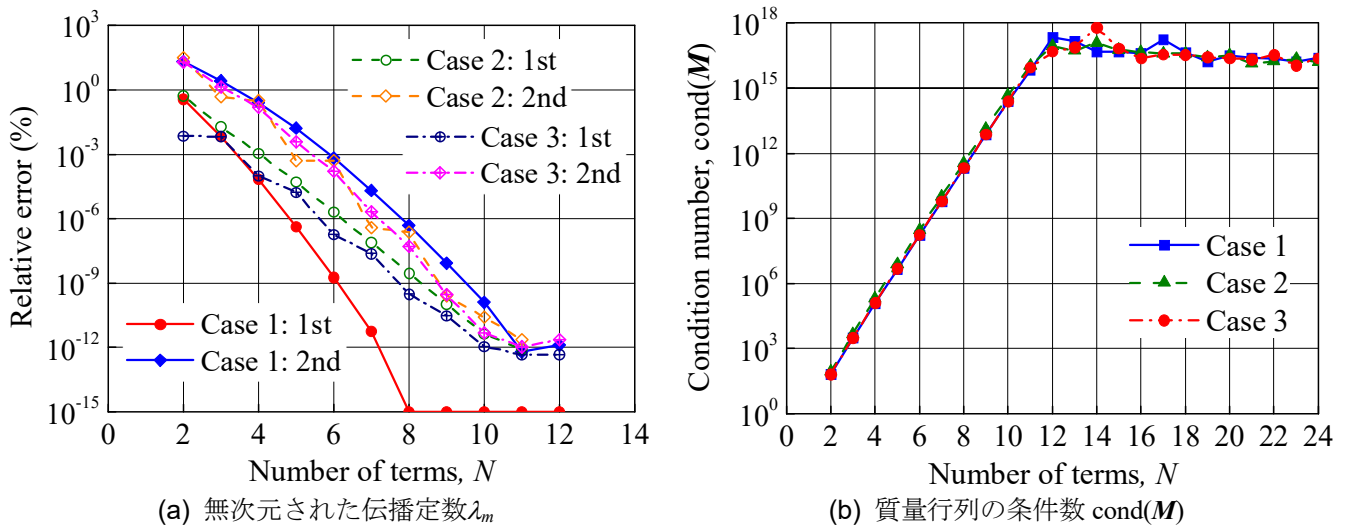


図-1 一端固定・他端自由の変断面均質弾性棒の固有値と質量行列の条件数に与える展開項数の影響: $a = b = 1$

$$U(x) \cong \hat{U}(x) = F_0(x)F_L(x) \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n. \quad (5)$$

ここで, a_n は基底の重み(展開係数), N は展開項数であり, $F_0(x)$ と $F_L(x)$ は, それぞれ, $(x=0)$ と $(x=L)$ の境界で基本境界条件を正確に満たす境界関数である.

式(5)と初等関数などで形式的に表した $A(x)$ を式(4)の汎関数に代入し, 汎関数が停留値を取る条件から次式のような代数方程式を得る.

$$(\mathbf{K} - \Delta^2 \mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \Delta = \omega c_0^{-1}. \quad (6)$$

ここで, $\mathbf{K}$ は剛性行列, $\mathbf{M}$ は質量行列であり, これらは Gauss-Legendre の数値積分により数値的に求めた. $\mathbf{a}$ は展開係数の縦ベクトルであり, Δ は伝播定数である.

5. 数値実験および考察

本研究では, 64 bit OS の環境の下で Fortran により計算コードを作成した. 数値実験は倍精度計算で行い, 行列演算と固有値問題の求解にはインテル®MKL を用いた. なお, 本稿では第 m 次の角速度 ω_m を無次元化された伝播定数 $\lambda_m = \omega_m L c_0^{-1}$ で表す.

(1) 剛体モードを含む問題の精度改善の試み

剛体運動が許容されるとき棒の $\mathbf{K}$ は正則でない. このようなとき, 著者らは式(6)を標準固有値問題に変換して Δ^2 と $\mathbf{a}$ を計算してきた. しかし, 変換にともなう行列演算の増加とこれによる誤差の混入, 求解が安定せず近似解の精度低下に悩まされた. 本稿では, 文献3)による固有値のずらし量 μ により $\mathbf{K}$ を正定値化し, 一般固有値問題のまま計算することを試みた.

両端自由 (F-F) な等断面 $A(x) = A$ (定数) の均質弾性棒の縦自由振動問題を例題とし, その結果を表-1 に示す. λ_2 と λ_3 を対象とし, 厳密解と比較することで改

善効果を検証した. また, $\mu = 10$ に設定し, N は 2 から 11 まで変化させた. 表-1 より, $\mathbf{K}$ の正定値化による近似解の数値安定性と計算精度の改善が確認できる.

(2) 変断面棒の p -Ritz 解の精度と係数行列の性質

ここでは厳密解が存在する case 1: $A(x) = A_0$, case 2²⁾: $A(x) = A_0(ax+b)^2$, case 3³⁾: $A(x) = \sin^2(ax+b)$ を例題として, p -Ritz 解の精度, 係数行列の性質と展開項数との関係を調べた. 係数行列の性質は行列の成分, 条件数および行列式の数値を定量的な指標とした.

結果の一例として, 一端固定・他端自由 (C-F) の変断面棒の(a) 無次元伝播定数 λ_1, λ_2 の厳密解に対する相対誤差, (b) 質量行列の条件数 $\text{cond}(M)$ と展開項数 N との関係を図-1 に示す. 相対誤差は有効数字 15 桁の数値同士から算出し, 相対誤差 0% は 10^{-15} としてプロットした. これより, 次のことが確認できよう.

- 1) λ_1, λ_2 は上界定理に従い, 正解に向かって収束する.
- 2) $N = 10$ のときの λ_1 は有効数字 13 桁まで, λ_2 は 11 桁まで厳密解と一致する.
- 3) $N = 12$ (case 2), 13 (case 1, 3)以上は, 式(6)の求解を正常に終了できない. このとき, $\text{cond}(M) \geq 10^{16}$ であるため, $N = 12$ 前後が倍精度計算の限界である. 固有ベクトル $\mathbf{a}$ から計算される各ケースの振幅変位と垂直ひずみの精度は, 当日説明する. 今後は, 軸方向傾斜機能材料について同様の調査を行う予定である.

参考文献

- 1) Abrate, S.: J. Sound Vib. **185**, pp.703-716, 1995.
- 2) Kumar, B.M. and Sujith, R.I.: J. Sound Vib. **207**, pp.721-729, 1997.
- 3) 鷺津ら: 有限要素法ハンドブック I (基礎編), 培風館, pp.94-106, 1981.