周面単純支持された線形弾性板の 3 次元自由振動問題における有限要素法の固有振動モードの分解能と要素分割数の関係

大分工業高等専門学校　正会員　名木野晴暢
大分工業高等専門学校　学生会員　○久門祐介
大分工業高等専門学校　学生会員　山本寧音
明石工業高等専門学校　正会員　石丸和宏

1. まえがき

有限要素法（以下，FEM）は，上下方向と水平方向の地震動による構造物の動的挙動を予測することができる汎用性のある強力なツールである．しかし，FEM による結果はあくまでも正解に対する近似解であり，その精度は要素分割数や分割パターンなどに依存する．

佐藤ら [1), 2)] は 3 次元動弾性問題における FEM のモード分解能の把握を目的とし，厳密解を得ることができる周面単純支持された線形弾性板の固有円振動数と固有振動モードの解析精度と要素タイプ，要素分割数および要素のアスペクト比の関係を調べてきた．文献 2)では固有振動モードについて検討されているが，x, y 方向の面外変位の半波数 m, n が 1 の場合に限定されていた．そこで，本稿では，半波数 m, n が 1 よりも大きい固有振動モードの有限要素解の精度を明らかにすることを目的としている．また，これまでに得られている結果 [1), 2)] と本稿の結果を整理し，弾性板の 3 次元自由振動問題における FEM のモード分解能と要素分割数の関係，すなわち要素分割数の目安を提示する．

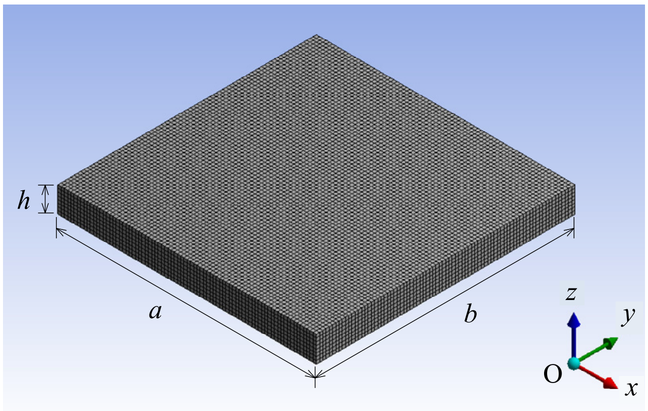


図-1　線形弾性板と直交座標系

2. 数値実験モデルと FEM の離散化条件

図-1 のような周面単純支持された等質・等方かつ線形弾性である中等厚（$h/a = 0.1$）正方形板（$b/a = 1$）の 3 次元自由振動問題 [2)] を考える．ここで，a は板の長さ，b は幅，h は高さであり，u, v, w は，それぞれ，x, y, z 方向の変位成分である．3 次元動弾性論に基づく周面単純支持された弾性板の自由振動は，面内変位 u, v のみによる面内振動と面内変位 u, v と面外変位 w が連

表-1　FEM により求められる弾性板の逆対称（A）モード：$h/a = 0.1, b/a = 1$, SOLID186, $m_x \times m_y \times m_z = 80 \times 80 \times 8$

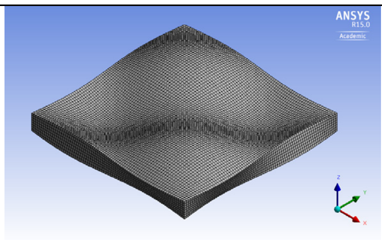
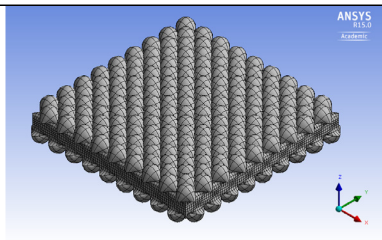
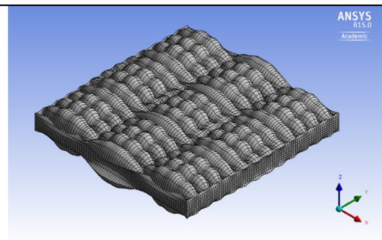
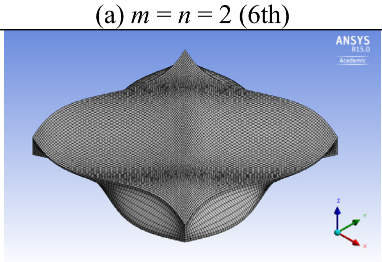
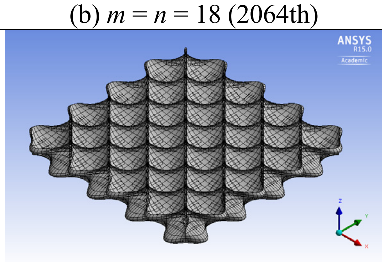
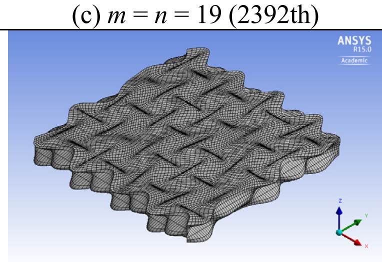
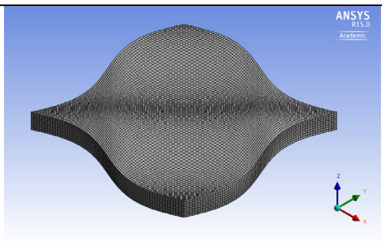
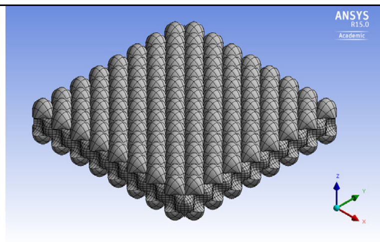
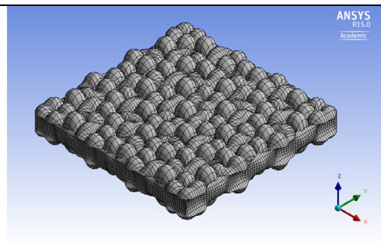
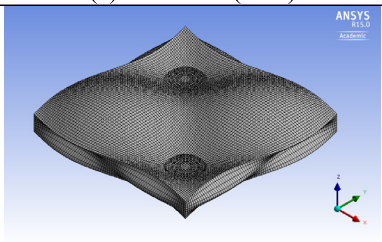
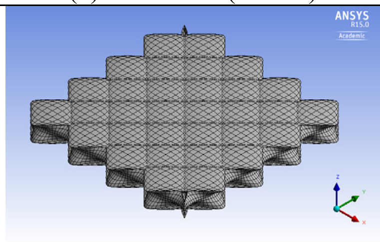
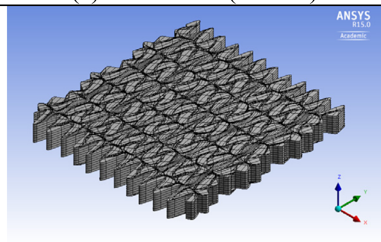
A1	 $\Omega = 2.12139$ ($\Omega_{\mathrm{Exact}} = 2.12145$) (a) $m = n = 2$ (6th)	 $\Omega = 44.8925$ ($\Omega_{\mathrm{Exact}} = 44.8967$) (b) $m = n = 18$ (2064th)	 $\Omega = 47.5003$ ($\Omega_{\mathrm{Exact}} = 47.5593$) (c) $m = n = 19$ (2392th)
A2	 $\Omega = 21.8911$ ($\Omega_{\mathrm{Exact}} = 21.8907$) (a) $m = n = 2$ (303th)	 $\Omega = 40.0900$ ($\Omega_{\mathrm{Exact}} = 40.0896$) (b) $m = n = 8$ (1503th)	 $\Omega = 43.0913$ ($\Omega_{\mathrm{Exact}} = 43.0864$) (c) $m = n = 9$ (1843th)

表-2　FEM により求められる弾性板の対称（S）モード：$h/a = 0.1$, $b/a = 1$, SOLID186, $m_x \times m_y \times m_z = 80 \times 80 \times 8$

S1	 $\Omega = 9.25459$ ($\Omega_{\mathrm{Exact}} = 9.25455$) (a) $m = n = 2$ (55th)	 $\Omega = 43.5108$ ($\Omega_{\mathrm{Exact}} = 43.5179$) (b) $m = n = 16$ (1886th)	 $\Omega = 45.6991$ ($\Omega_{\mathrm{Exact}} = 45.6951$) (c) $m = n = 17$ (2161th)
S2	 $\Omega = 34.7386$ ($\Omega_{\mathrm{Exact}} = 34.7359$) (a) $m = n = 2$ (1025th, Exact:1023th)	 $\Omega = 42.3294$ ($\Omega_{\mathrm{Exact}} = 42.3278$) (b) $m = n = 8$ (1751th)	 $\Omega = 46.3290$ ($\Omega_{\mathrm{Exact}} = 46.3355$) (c) $m = n = 9$ (2239th)

成する面外振動に大別される．本研究では後者の振動モードを対象とする．

有限要素解析には，汎用コード ANSYS Workbench 15.0 を用いた．本研究では 20 節点を有する 2 次の 6 面体要素（SOLID186）を使用し，要素が常に立方体になるように $m_x \times m_y \times m_z = 80 \times 80 \times 8$ に分割した．ただし，m_x, m_y, m_z は，それぞれ，x, y, z 方向の要素分割数である．さて，厳密解の面外変位 w は，次のように表される．

$$w = hW_{mnl}\left(\frac{z}{h}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right),\ (m, n = 1, 2, \ldots, \infty) \quad (1)$$

ここで，$W_{mnl}\ (z/h)$ は厚さ方向の未知関数であり，l はそのモード次数である．このとき，$m = n = 1$ に限定すると，板の中央面（$z = h/2$）に関して逆対称なモード（A）と対称なモード（S）共に $l = 2$ まで収束した固有振動モードが得られるが，$l = 3$ 以上は m_z が少ないために正しい固有振動モードが得られなかった [2]．

3. 数値実験および考察

数値実験ではポアソン比 $\nu = 0.3$ を用いる [2]．FEM により計算された弾性板の逆対称 (A) モードと対称 (S) モードを纏めたものを，それぞれ，**表-1** と**表-2** に示す．表中には，振動数パラメータ $\Omega = \omega a(\rho/E)^{1/2}$ の数値も併記した．また，Ω_{Exact} は 3 次元動弾性論に基づく厳密解である．これより，1 次の A モード（以後，A1 のように表す）は $m = n = 18$（2064 番目の固有振動），A2 モードは $m = n = 8$（1503 番目の固有振動），S1 モードは

表-3　h/a=0.1 の弾性板の FEM のモード分解能

Mode	$m = n$	$m_x = m_y$
A1	18 (2064th)	5
S1	16 (1886th)	5
A2	8 (1503th)	10
S2	8 (1751th)	10

$m = n = 16$（1886 番目の固有振動），A2 モードは $m = n = 8$（1751 番目の固有振動）まで正しい固有振動モードが求められていた．以上の情報から A1, S1, A2, S2 の各モードにおける正弦関数の半波数 m, n と m_x, m_y の関係を調べ，その結果を**表-3** に纏めた．表の $m_x = m_y$ は，半波数の形を表すのに必要だった要素数である．これより，l が大きくなると半波数の形を表すために必要になる要素分割数が多くなることが確認された．

4. まとめ

本研究では中等厚な弾性正方形板の 3 次元自由振動問題における FEM のモード分解能を調査し，解析に必要な要素分割数の目安を提示した．

謝辞：本研究の一部は，公益社団法人 LIXIL 住生活財団 2016 年度調査研究助成を受けて行われました．

参考文献

1) 佐藤ら：土木学会西部支部 研究発表会講演概要集 (CD-ROM), I-7, pp.13-14, 2017.
2) 佐藤ら：土木学会第 72 回年次学術講演会講演概要集 (DVD-ROM), I-138, pp.275-276, 2017.