

## 厚さ方向の固有関数に着目した線形弾性体の3次元自由振動問題 における有限要素法のモード分解能の調査について

大分工業高等専門学校 正会員 ○名木野晴暢  
大分工業高等専門学校 学生会員 久門祐介  
大分工業高等専門学校 学生会員 山本寧音  
明石工業高等専門学校 正会員 石丸和宏

### 1. まえがき

土木構造物に作用する自然的な衝撃荷重には、落石、土石流、崩壊土砂、波浪、津波、直下地震や竜巻などがある<sup>1)</sup>。構造物の動的挙動および破壊形態は、衝突物体の大きさ、質量や衝突速度などに依存する。文献1)によれば、一般的に衝突速度が小さいと全体破壊に至り、それが大きいと局部破壊が生じるとされている。

有限要素法（以下、FEM）は、衝撃荷重を受ける構造物の動的挙動を予測し得る汎用性のある強力なツールである。しかし、衝撃荷重の衝突速度によって構造物の動的挙動は大きく異なるため、FEMの解析精度を事前に評価しておくことは重要である。ここで、構造物の動的挙動は固有関数（固有振動モード）によって展開できるため<sup>2)</sup>、FEMのモード分解能は、その精度を評価する指標の一つになると考えられる。

佐藤ら<sup>3),4)</sup>は3次元動弾性問題におけるFEMのモード分解能の把握を目的とし、基礎的な知見を積み重ねてきた。本稿では文献3)と文献4)で得られた知見を基礎とし、厚さ方向の固有関数に着目してFEMのモード分解能を調べたので報告する。

### 2. 数値実験モデルとFEMの離散化条件

図-1のような長さ  $a$ 、幅  $b$ 、高さ  $h$  を有する周面単純支持された等質・等方な矩形の線形弾性体の3次元自由振動問題<sup>2)</sup>を考える。ここで、 $u, v, w$  は、それぞれ、 $x, y, z$  方向の変位成分である。有限要素解析には、汎用コード ANSYS Workbench 15.0 を用いた。文献4)では中等厚な正方形弾性体 ( $h/a = 0.1, b/a = 1$ ) の  $x, y$  方向の半波数  $m, n$  が1の自由振動を例題とし、 $m_x \times m_y \times m_z = 80 \times 80 \times 8$  ( $m_x, m_y, m_z$  は、それぞれ、 $x, y, z$  方向の要素分割数) に要素分割してFEMのモード分解能を調べている。しかし、 $m_z$  が少ないために厚さ方向の固有関数の分解能を議論することができなかった。そこで、本稿では  $h/a = 0.3$  のモデルに変更する。文献3)

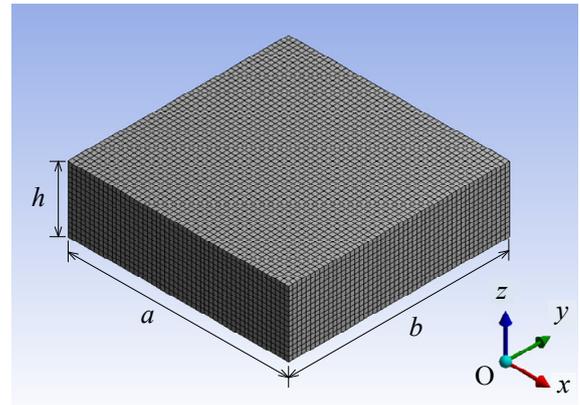


図-1 線形弾性体と直交座標系

と文献4)を参考にして、本稿では2次の6面体ソリッド要素 (SOLID186) を使用し、要素が常に立方体になるように  $m_x \times m_y \times m_z = 50 \times 50 \times 15$  に分割した。

### 3. 周面単純支持された矩形弾性体の自由振動

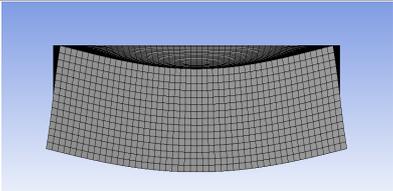
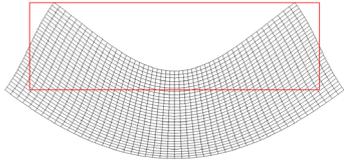
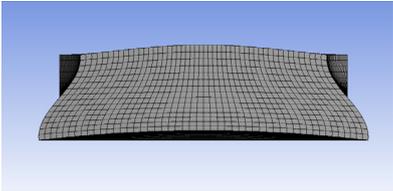
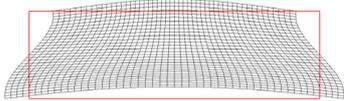
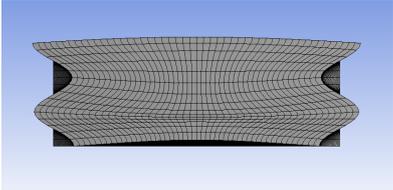
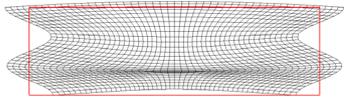
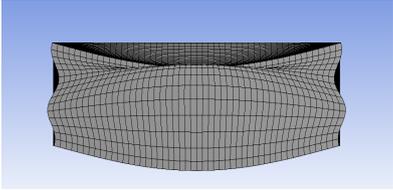
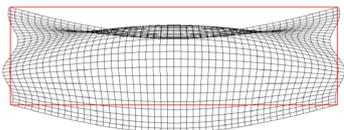
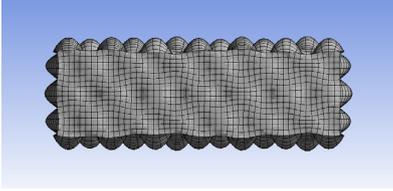
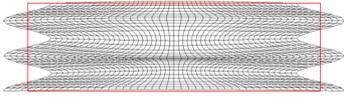
文献2)などを参考にして、周面単純支持された矩形弾性体の3次元自由振動問題の厚さ方向の固有関数  $U_{mn}(z), V_{mn}(z), W_{mn}(z)$  の厳密解を導出した。厳密解は、表-1に示すような5ケースに分類される。よって、本稿では、双曲線関数、多項式関数および三角関数の組み合わせによって表される厚さ方向の固有関数を近似するのに必要な要素数を調べることになる。

表-1 厚さ方向の固有関数の厳密解

Case	Range of $\omega h$	$U_{mn}(z), V_{mn}(z), W_{mn}(z)$
1	$0 < (\omega h) < g_{mn}c_2$	Hyperbolic function.
2	$\omega h = g_{mn}c_2$	Polynomial function, hyperbolic function.
3	$g_{mn}c_2 < (\omega h) < g_{mn}c_1$	Trigonometric function, hyperbolic function.
4	$\omega h = g_{mn}c_1$	Trigonometric function, polynomial function.
5	$\omega h > g_{mn}c_1$	Trigonometric function.

Note:  $g_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi h}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi h}{b}\right)^2$

表-2 線形弾性体の中央面に関して逆対称な固有振動モード :  $h/a = 0.3, b/a = 1, \nu = 0.3, m = n = 1, y/b = 0.5$ 

Thickness mode	FEM	Exact
A1 (Case 1) [Mode number: 1st]	 $\Omega = 1.42418$	 $\Omega_{\text{Exact}} = 1.42419$
A2 (Case 5) [Mode number: 42th]	 $\Omega = 8.12643$	 $\Omega_{\text{Exact}} = 8.12643$
A3 (Case 5) [Mode number: 439th]	 $\Omega = 19.4699$	 $\Omega_{\text{Exact}} = 19.4680$
A4 (Case 5) [Mode number: 888th]	 $\Omega = 24.9035$	 $\Omega_{\text{Exact}} = 24.9027$
A5 (Case 5) [Mode number: 1912th]	 $\Omega = 32.6287$	 $\Omega_{\text{Exact}} = 32.6277$

#### 4. 数値実験および考察

数値実験では、ポアソン比  $\nu = 0.3$  に設定した。表-2 は、FEM により求められた線形弾性体の中央面 ( $z = h/2$ ) に関して逆対称なモード (A) の  $y/b = 0.5$  の位置での断面図を纏めたものである。ただし、厳密解のモード図は  $\nu = 0$  としている。表中には、振動数パラメータ  $\Omega = \omega a(\rho/E)^{1/2}$  の数値も併記した。  $\Omega_{\text{Exact}}$  は振動数パラメータの厳密解である。なお、対称モード (S) については紙面の都合により割愛した。これより、SOLID186 を用いて  $m_z = 15$  に設定すれば、4 次の A モード (以下、A4 モードのように表す) まで厚さ方向の固有関数を正しく近似できていると判断できる。ここで、A1 モードの  $U_{mn}(z), V_{mn}(z), W_{mn}(z)$  の板厚方向分布と  $m_z$  の関係を調べてみると、 $m_z = 3$  程度で厳密解を近似できると考えられる。A2 モードの  $U_{mn}(z), V_{mn}(z),$

$W_{mn}(z)$  の板厚方向分布は A1 モードのそれよりも曲線の変化が大きくなるため、 $m_z = 5$  程度が必要になると思われる。現在、この仮説が正しいかを詳しく調べている。S モードについても同様の検討を行い、FEM の厚さ方向の固有関数のモード分解能と厚さ方向の要素分割数の関係を纏める予定である。

謝辞：本研究の一部は、公益社団法人 LIXIL 住生活財団 2016 年度調査研究助成を受けて行われました。

#### 参考文献

- 1) 石川ら：基礎からの衝撃工学，森北出版，pp.162-166，2008.
- 2) Lee and Reismann: Int. J. Eng. Sci. 7, pp.93-113, 1969.
- 3) 佐藤ら：土木学会西部支部 研究発表会講演概要集 (CD-ROM), I-7, pp.13-14, 2017.
- 4) 佐藤ら：土木学会第 72 回年次学術講演会講演概要集 (DVD-ROM), I-138, pp.275-276, 2017.