

軸方向傾斜機能材料からなる線状部材の線形座屈特性に与える支持条件の影響

大分工業高等専門学校
大分工業高等専門学校
豊橋技術科学大学

学生会員
正会員
非会員

○山本寧音
名木野晴暢
足立忠晴

1. まえがき

傾斜機能材料 (Functionally Graded Materials: FGMs) は熱応力の緩和を目的として開発されたため、板や殻などの熱応力問題の解析が活発になされてきた。最近では、軸方向傾斜機能材料 (Axially Functionally Graded Materials: AFGMs) からなる線状部材についても研究が行われるようになり、AFGMs の自由振動問題、縦衝撃問題や線形座屈問題が解析されている。

山本ら¹⁾は、AFGMs からなる線状部材 (以下、AFG 柱) の座屈安定性を調べるために、中心軸圧縮力を受ける両端ヒンジ支持された AFG 柱の線形座屈特性に与える下端と上端の縦弾性係数の比の影響を明らかにした。AFG 柱には縦弾性係数の小さい端部と大きい端部が存在するので、柱の下端と上端の支持条件によって線形座屈特性は変化することが予想される。

本稿の目的は、中心軸圧縮力を受ける AFG 柱の線形座屈特性に与える支持条件と縦弾性係数比の影響を明らかにすることである。

2. 数値実験モデルと解析手法

図-1 のような中心軸圧縮荷重 P を受ける長さ L の等断面の AFG 柱の線形座屈固有値問題を考える。ここで、 I は中立軸に関する断面二次モーメント、 $w(x)$ は面外変位である。 x 軸方向に変化する縦弾性係数の分布 $E(x)$ は、文献 1) と同様、次のように設定する。

$$E(x) = E_0 e^{p(\frac{x}{L})}, \quad p = \ln E, \quad E = \frac{E_L}{E_0}. \quad (1)$$

ただし、 E_0 と E_L は AFG 柱の下端 ($x=0$) と上端 ($x=L$) の縦弾性係数であり、それらの縦弾性係数比を E で定義する。また、 p は材料の不等質性を表す index である。

式(1)に従う AFG 柱の縦弾性係数の軸方向分布 $E(x)$ を図-1 に示してある。図-1 の左側の柱は固定されている下端から上端へと縦弾性係数が増加する AFG 柱 ($E_L > E_0$) のモデル (以下、Case 1) を表しており、右側の柱はそれを逆向きにして下端から上端へと縦弾性係数が減少する AFG 柱 ($E_0 > E_L$) のモデル (以下、Case

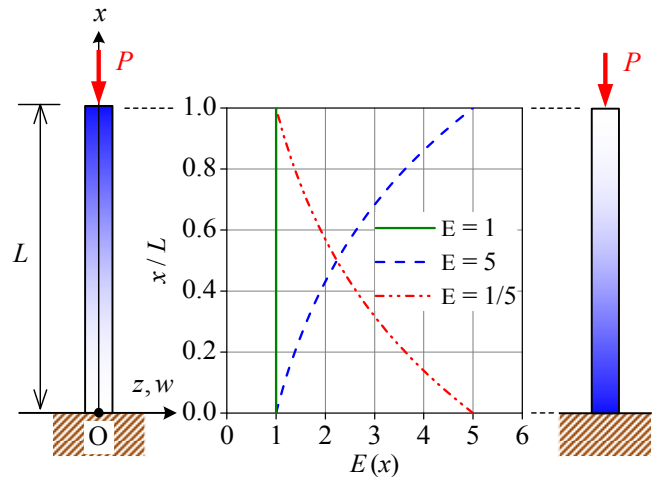


図-1 中心軸圧縮力を受ける AFG 柱と座標系

表-1 C-S された AFG 柱の座屈荷重パラメータの収束性とたわみ角に対応する仮想ばね係数の影響

m_x	β		
	10^7	10^8	10^9
17	9.869602	9.869606	9.869622
19	9.869603	9.869604	9.869619
21	9.869602	9.869604	9.869598
Exact		9.869604	

2) である。なお、 $E=1$ は等質・等方材料を意味する。本稿で扱う下端と上端の拘束はヒンジ支持 P ($w=M=0$)、固定端 C ($w=\theta=0$)、自由端 F ($M=Q=0$) および回転拘束水平自由端 S ($\theta=Q=0$) の 4 つとし、支持条件は C-P のように表す。最初の記号は下端での拘束、ハイフンの後の記号は上端の拘束を意味する。ただし、 θ はたわみ角、 M は曲げモーメントであり、 Q は z 方向のせん断力である。

本稿も文献 1) と同様に B-spline Ritz 法 (以下、本手法) により解析し、次式で表される無次元化された座屈荷重 (以下、座屈荷重パラメータ) Λ を用いる¹⁾。

$$\Lambda = \frac{P_0 L^2}{E_0 I}. \quad (2)$$

本手法は仮想ばね法により幾何学的境界条件を数値的に満足させているため、数値解の収束性と仮想ばね係数の関係についても調べた。その一例として柱の上端で $\theta=0$ が課される C-S された AFG 柱の Λ_{1st} の収束

表-2 本手法により求められる AFG 柱の座屈荷重パラメータの精度比較: $p_x = 5, m_x = 21$

Boundary conditions	Methods	E			
		$1/e$	$1/e^{1/2}$	$e^{1/2}$	e
C-F	Present	1.782102	2.112127	2.844778	3.241181
	LDQM ²⁾	1.782102	2.112127	2.844778	3.241181
C-C	Present	23.490038	30.598353	50.448156	63.852545
	LDQM ²⁾	23.490038	30.598353	50.448156	63.852545
C-P	Present	11.988386	15.639912	25.782548	32.554915
	LDQM ²⁾	11.988386	15.639912	25.782548	32.554915
C-S	Present	5.972526	7.682709	12.666642	16.235007
	LDQM ²⁾	5.972525	7.682708	12.666644	16.235007

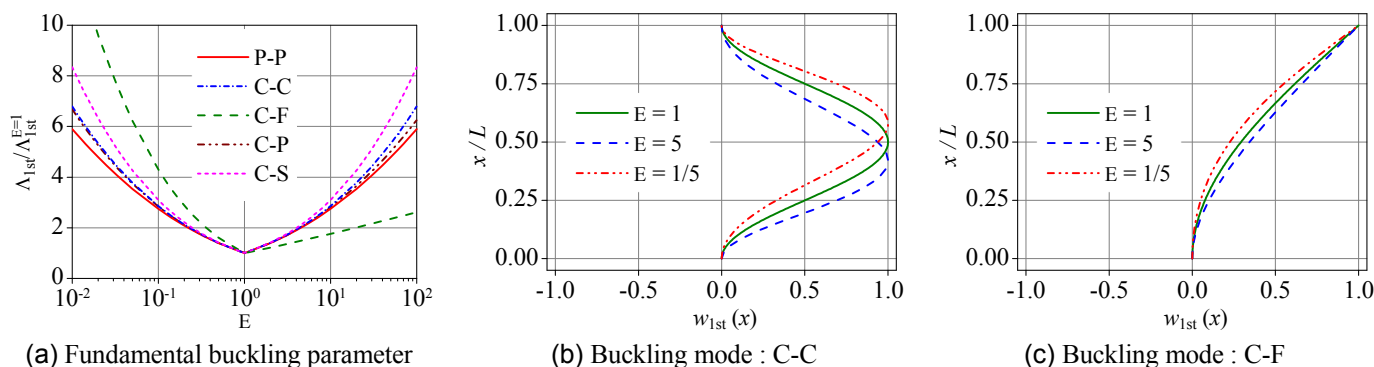


図-2 AFG 柱の線形座屈特性に与える支持条件と縦弾性係数比の影響

性と無次元仮想ばね係数 β の関係を表-1 に示す. これより, Neumann 条件のみを満足させるときの β の値は敏感で, 適切な値を設定しないと厳密解に収束しない. 表-2 には, $p_x = 5, m_x = 21$ (自由度 25) に設定したときの AFG 柱の Λ_{1st} の精度比較を示した. 支持条件は C-F, C-C, C-P および C-S とし, E は $1/e, 1/e^{1/2}, e^{1/2}, e$ に設定した. また, 本手法の数値解の解析精度を比較するために Yilmaz らの LDQM による数値解²⁾ (格子点数 $N = 41$, 自由度 39) を併記した. これより, 本手法の数値解は LDQM の数値解と良い一致を示している. また, 面外変位から曲げモーメントまでの座屈モードも一定の形に収束することを確認している. よって, 本手法は任意の支持条件下においても AFG 柱の座屈荷重とこれに対応する座屈モードを LDQM よりも少ない自由度, かつ高い解析精度で求めることができる.

3. 数値実験および考察

AFG 柱の座屈荷重に与える支持条件と E の影響を図-2 (a) に示す. Λ_{1st} の無次元化には最も小さい縦弾性係数の値を用い, これを各支持条件の等質・等方材料の座屈荷重 $\Lambda_{1st}^{E=1}$ で基準化して整理した. E は $1/100$ (Case 2) から 100 (Case 1) まで変化させている. これより, 対称な支持条件 (P-P, C-C) の $\Lambda_{1st}^E / \Lambda_{1st}^{E=1}$ は, Case 1 と Case 2 で同じ値を取る. しかし, 非対称な支持条件

(C-F, C-P, C-S) のときは, "(Case 2 の Λ_{1st}) > (Case 1 の Λ_{1st})" の関係にある. これより, 縦弾性係数の小さな端部よりも大きな端部に強い拘束を与えることで, Λ_{1st} を大きくできることがわかる. 図-2 (b) は C-C, 図-2 (c) は C-F の AFG 柱の座屈モード w_{1st} に与える E の影響をまとめた結果である. E は $1, 5$ (Case 1), $1/5$ (Case 2) に設定し, モードは最大振幅で正規化した. これより, C-C の Case 1 と Case 2 の w_{1st} の形状は, $x/L = 0.5$ を中心に反転させることで一致する. しかし, C-F は一致しない. また, Case 1 の w_{1st} は $E=1$ よりもやや大きな曲げ変形であるのに対して, Case 2 の w_{1st} は $E=1$ と Case 1 のそれよりもモード形状が小さくなっている.

4. まとめ

本研究では中心軸圧縮力を受ける AFG 柱の座屈特性の基礎的な知見を得ることを目的とし, 本稿ではその線形座屈特性に与える支持条件と縦弾性係数比の影響を明らかにした. また, 本手法は, 任意の支持条件を有する AFG 柱の線形座屈解析においても LDQM²⁾よりも少ない自由度で高い精度を有することも示した.

参考文献

- 山本ら: 第 5 回九州橋梁・構造工学研究会シンポジウム 論文集 (USB), R4-1, 6 pages, 2017.
- Yilmaz et al.: Mathematical Problems in Engineering, Vol.2013, Article ID 793062, 12 pages, 2013.