

片持された中実円筒体の縦自由振動問題における初等理論と Love の理論の適用範囲：基本振動から 5 次振動までを対象として

大分工業高等専門学校

学生会員

○鳥越史能

大分工業高等専門学校

正会員

名木野晴暢

1. まえがき

地震大国である我国は、海溝型地震と直下型地震の影響を受ける厳しい環境に置かれているため、鉛直方向と水平方向の地震動の両者に対する動的設計が必要になる。構造物の動的挙動を把握する際に基礎的な情報を提供してくれるのが固有円振動数と固有振動モードである。また、耐震設計では、基本振動の固有円振動数を簡易かつ正確に把握することが重要になる。

3次元動弾性論に基づけば構造物の正確な自由振動特性を把握することができるが、実務設計では、簡便な 1 次元理論や 2 次元理論に基づいて自由振動特性を予測している。これらの理論は 3 次元動弾性論に幾つかの仮定を設けた近似理論であるので、その適用範囲を理解しておくことが重要になる。Leissa・So¹⁾ は 3 次元動弾性論に基づく中実円筒体の縦振動と曲げ振動の固有円振動数を求め、これと初等理論、Love の理論、Bernoulli-Euler の理論や Timoshenko の理論により求められるそれとを比較している。しかし、固有円振動数の比較による単純な検討しかなされていない。

本研究の目的は片持された中実円筒体（以下、円筒体）の縦自由振動問題を対象として、初等理論と Love の理論の適用範囲と円筒体の長さ \$L\$ と材料定数の関係を文献 1) よりも詳しく明らかにすることである。3 次元動弾性論に基づく片持された円筒体の縦自由振動の固有円振動数と固有振動モードの厳密解を得ることは容易でない。そこで、本研究では有限要素 (FE) 法により精度の高い近似解を正解として、初等理論と Love の理論の適用範囲を議論することとした。

2. 数値実験モデル

図-1 のように外径 \$R_o\$ (直径 \$D = 2R_o\$) と長さ \$L\$ を有する等質・等方な円筒体の 3 次元縦自由振動問題を考える。ここで、円筒体は線形弾性（縦弾性係数 \$E\$、ポアソン比 \$\nu\$）であるとする。また、\$u, v, w\$ は、それぞれ、\$r, \theta, z\$ 方向の変位成分である。円筒体の下面 (\$z=0\$) は固定 (\$w=u=0\$) とし、上面 (\$z=L\$) は自由とする。

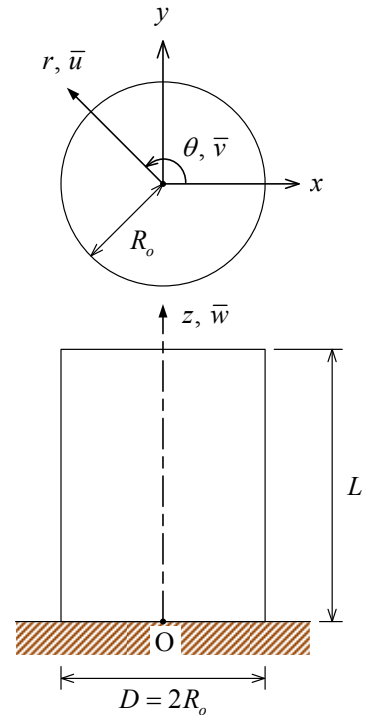


図-1 片持された中実円筒体と円筒座標系

FE 解析には、汎用コード ANSYS Workbench 15.0 を用いた。円筒体の 3 次元縦自由振動問題は軸対称振動問題であるので、2 次の 8 節点軸対称ソリッド要素 (PLANE183) によって要素が常に正方形になるように円筒体を離散化し、2 次元問題として解析した。

3. Love の理論と初等理論

Love の理論では、円筒座標系 \$(r, \theta, z)\$ による変位成分 \$u, v, w\$ を、それぞれ、次のように仮定する。

$$\bar{w}(r, \theta, z, t) = w(z, t), \quad \bar{v}(r, \theta, z, t) = 0,$$

$$\bar{u}(r, \theta, z, t) = -\nu r \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (1)$$

更に、一軸応力状態 \$\sigma_{zz} = E \epsilon_{zz}\$ を仮定して Hamilton の原理を用いれば、次のような運動方程式が求められる。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \nu^2 k^2 \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial z^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, \quad c_0^2 = \frac{E}{\rho}, \quad k^2 = \frac{\int_A r^2 dA}{\int_A dA}. \quad (2)$$

表-1 FE 法により求められる無次元固有円振動数 Ω の収束性と解析精度: $\nu=0.3$

L/D	$m_z \times m_r$	Modes				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
3	24 × 4	0.42354	1.2586	2.0070	2.2288	2.4140
	60 × 10	0.42350	1.2585	2.0068	2.2288	2.4140
	84 × 14	0.42350	1.2585	2.0067	2.2288	2.4140
	120 × 20	0.42350	1.2585	2.0067	2.2288	2.4140
	p -Ritz ¹⁾	0.4254	1.2601	2.0301	-	-
	Chebyshev-Ritz ²⁾	0.4252	1.2594	2.0289	-	-
	B-spline Ritz ³⁾	0.42516 ($n=0$)	1.2593 ($n=0$)	2.0289 ($n=0$)	2.1312 ($n=2$)	2.3406 ($n=2$)
10	80 × 4	0.12679	0.38010	0.63252	0.88326	1.1311
	200 × 10	0.12679	0.38010	0.63252	0.88326	1.1311
	280 × 14	0.12679	0.38008	0.63250	0.88322	1.1311
	400 × 20	0.12679	0.38008	0.63248	0.88322	1.1311
	480 × 24	0.12679	0.38008	0.63248	0.88322	1.1311
	p -Ritz ¹⁾	0.1270	0.3807	0.6322	0.8834	1.1306
	Chebyshev-Ritz ²⁾	0.1269	0.3804	0.6326	0.8826	1.1291
	B-spline Ritz ³⁾	0.12695 ($n=0$)	0.38045 ($n=0$)	0.63266 ($n=0$)	0.88261 ($n=0$)	1.1292 ($n=0$)
40	320 × 4	0.031669	0.095006	0.15833	0.22163	0.28490
	800 × 10	0.031669	0.095006	0.15833	0.22163	0.28490
	1120 × 14	0.031669	0.095006	0.15833	0.22163	0.28490
	1600 × 20	0.031669	0.095006	0.15833	0.22163	0.28490
	p -Ritz ¹⁾	0.03177	0.09516	0.1586	0.2220	0.2853
	B-spline Ritz ³⁾	0.031683 ($n=0$)	0.095043 ($n=0$)	0.15838 ($n=0$)	0.22169 ($n=0$)	0.28495 ($n=0$)

ここで, k は断面の極回転半径であり, $c_0 (> 0)$ はポアソン比 ν の影響を無視した長い線部材の縦波の伝播速度である. 境界条件は, w または次式で与えられる合応力 N を規定する.

$$N(z, t) = EA \frac{\partial w}{\partial z} + \rho A \nu^2 k^2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} \quad (3)$$

ただし, A は断面積である. 当然のことながら, $\nu=0$ とすれば初等理論の運動方程式と合応力式に一致する.

4. 数値実験例および考察

数値実験では, 文献 1) と同様 $\nu=0.3$ を用いる. また, 要素分割数は $m_z \times m_r$ で表す. ここで, m_z, m_r は, それぞれ, z, r 方向の要素分割数である.

本研究では, できるだけ精度の高い FE 解を準備する必要がある. そこで, FE 法によって計算される基本振動から 5 次振動までの無次元固有円振動数 $\Omega = \omega R_0 (\rho/G)^{1/2}$ (固有円振動数 ω , せん断弾性係数 G , 密度 ρ) と, これに対応する固有振動モードの収束性と解析精度を調べてみた. その結果を表-1 に示す. 長さ一直径比 L/D は短い円筒体 ($L/D=3$), 長い円筒体 ($L/D=10$) 及びかなり長い円筒体 ($L/D=40$) に設定した. FE 解の妥当性は, Leissa・So¹⁾ による p -Ritz 法, Zhou ら²⁾ の Chebyshev-Ritz 法および名木野ら³⁾ の B-spline Ritz 法による数値解と比較することで検証した.

表-1 より, FE 解は $m_z \times m_r$ の増大に伴い一定の値へ

収束し, 有効数字 5 桁の収束値を得ている. しかし, 精度の高い上界値^{2), 3)} よりも小さな値に収束しており, 上界値に対する相対誤差は -0.1 % から -1.1 % であった. 一次要素 (PLANE182) による解析とソルバーの変更を試みたが, 結果は改善されず原因の特定には至っていない. なお, 固有振動モードについても $m_z \times m_r$ の増大に伴い一定の形に収束するが, その詳細は紙面の都合により割愛している. 以上より, $m_r=14$ に設定すれば十分な精度を有する FE 解であると判断した.

現在, 式(2)で表される運動方程式を $w=0$ ($x=0$) と $N=0$ ($x=L$) の境界条件の下で厳密に解き, 初等理論と Love の理論による固有振動モードを式(1)に基づいて 2 次元的に表す準備をしている. その後, 固有円振動数と固有振動モードを指標として, 初等理論と Love の理論の適用範囲を議論する. 更に, $\nu=0.2, 0.499$ に設定した場合についても同様の検討する予定であり, これらについては当日発表する.

謝辞: 本研究の一部は, 公益社団法人 LIXIL 住生活財団 2016 年度調査研究助成を受けて行われています.

参考文献

- 1) Leissa and So: J. Acoust. Soc. America **98**, 2122-2135, 1995.
- 2) Zhou et al.: Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. **192**, 1575-1589, 2003.
- 3) 名木野ら: 構造工学論文集, Vol.54A, pp.90-101, 2008.