

3次元動弾性問題における有限要素法のモード分解能に関する一考察

大分工業高等専門学校

学生会員

○佐藤 弘 弥

大分工業高等専門学校

正 会 員

名木野晴暢

明石工業高等専門学校

正 会 員

石丸 和 宏

1. まえがき

定常状態（静止状態）にある構造物に衝撃的な外乱が作用すると、過渡現象を経て別の定常状態（例えば、振動状態）に至る。この過渡状態での応力波伝播現象を正確に評価し、振動状態に移行する過程を理論的に解明するためには、運動方程式（波動方程式）を高精度に解かなければならない。しかし、3次元弾性論に基づく弾性体の運動方程式が解析的に解けることは稀で、現実的には数値解析手法に頼らざるを得ない。

さて、3次元動弾性論に基づく運動方程式（Navierの方程式）の解は、次のように仮定できる¹⁾。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^s(\mathbf{x}, t) + \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{U}_r(\mathbf{x}) Q_r(t). \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{u}^s(\mathbf{x}, t)$ は準静的解、 $\mathbf{U}_r(\mathbf{x})$ は r 次の固有関数であり、 $Q_r(t)$ は時間関数（基準座標）である。 $Q_r(t)$ はDuhamel積分により解析的に求めることができる。よって、数値解析手法には、 $\mathbf{U}_r(\mathbf{x})$ と、その $\mathbf{x}$ に関する1階導関数を高次の r まで精度良く求めることが要求される。通常、運動方程式の空間方向の離散化には、汎用性の高い有限要素法が用いられるので、そのモード分解能を把握しておくことは重要である。また、これは、新しい応力波伝播問題の解析手法を開発する際に必要なモード分解能の指標にもなる。

本研究では、3次元動弾性問題における有限要素法のモード分解能を調べることを目的としている。本稿では、厳密解を得ることができる周面単純支持された線形弾性体を対象とし、厳密解を参照解とすることで有限要素法のモード分解能について考察した。

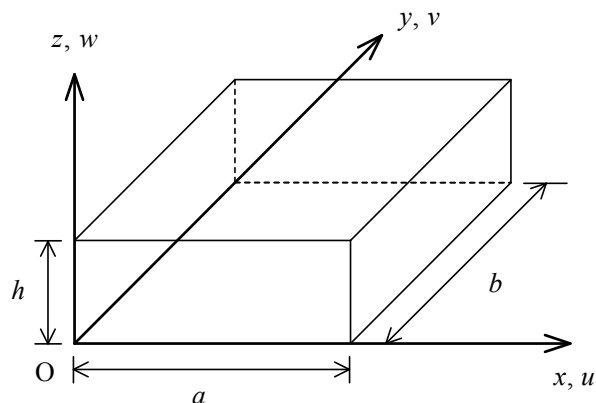


図-1 矩形線形弾性体と直交座標系

2. 数値実験モデルと有限要素解析の離散化条件

図-1のように長さ a 、幅 b 、高さ h を有する等質・等方な線形弾性体と直交座標系を設定した3次元動弾性問題を考える。ここで、 u, v, w は、それぞれ、 x, y, z 方向の変位成分である。また、弾性体の上下面($z=h, 0$)は自由面とし、周面($x=0, a$ および $y=0, b$)を支持面とする。本稿では、周面が単純支持され、 $h/a=0.1, 0.3, 0.5$ の厚さを有する正方形弾性体($b/a=1$)を取り扱う。

有限要素解析には、汎用コードANSYS 15.0を用いた。6面体ソリッド要素の変形性能とモード分解能の関係を考察するために、1次要素(SOLID185)と2次要素(SOLID186)を使用し、ソリッド要素が常に立方体になるように分割した。

3. 周面単純支持された矩形弾性体の自由振動

周面単純支持された矩形弾性体の3次元動弾性問題は、 x, y 方向へFourier級数展開することで厳密解¹⁾⁻³⁾またはべき級数解⁴⁾を得ることができる。詳細は割愛

表-1 本研究で計算した無次元固有振動数 Γ の厳密解の値とその振動モード： $h/a=0.1, b/a=1, \nu=0.3, m=n=1$

Method	Thickness-mode number l (mode sequence number)								
	1 (1)	2 (9)	3 (19)	4 (226)	5 (241)	6 (1119)	7 (1399)	8 (1494)	9 (4051)
	A1	MS1	S1	MA1	A2	S2	MS2	S3	A3
Present	5.77691	27.5536	46.5025	196.7720	201.3385	357.4186	390.6396	399.7726	584.3435
Exact (1970) ²⁾	5.7769	27.554	46.502	196.77	201.34	357.42	390.64	399.77	584.35
Series (2004) ⁴⁾	5.7769	27.554	46.503	196.77	201.34	357.42	390.64	399.77	584.34
Exact (2009) ³⁾	5.7769	27.5536	46.5025	196.7720	201.3385	357.4186	390.6396	399.7726	-

整数値 m, n は、それぞれ、 x, y 方向の半波数を意味する。

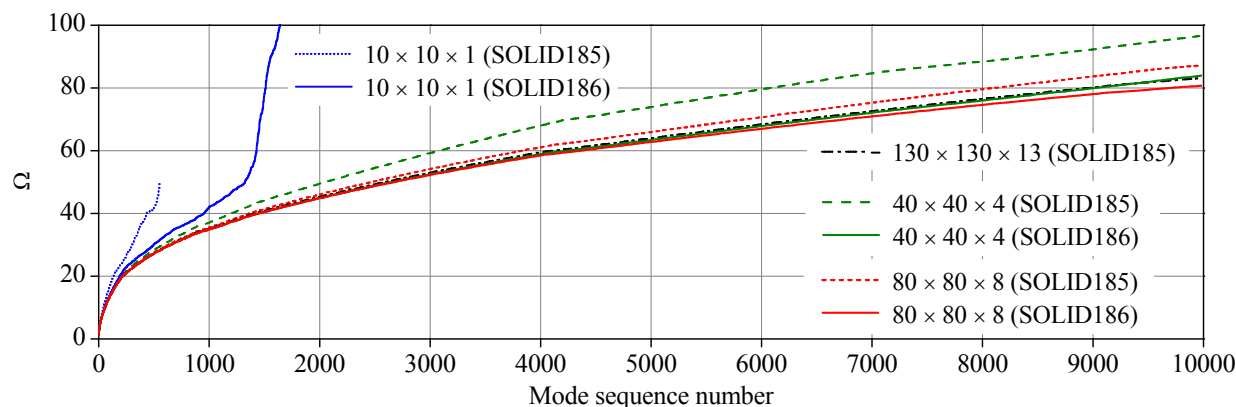


図-2 無次元固有振動数 Ω の収束性に与える要素分割数 $m_x \times m_y \times m_z$ と要素タイプの影響： $h/a = 0.1$

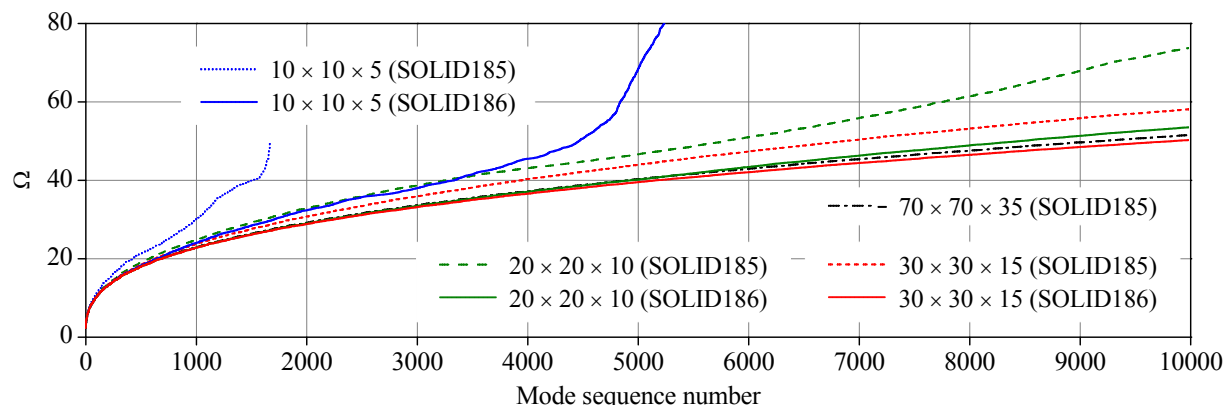


図-3 無次元固有振動数 Ω の収束性に与える要素分割数 $m_x \times m_y \times m_z$ と要素タイプの影響： $h/a = 0.5$

するが、その自由振動は、(1) 面内変位 u, v のみによる面内振動(thickness-twist mode)と(2) 面内変位 u, v と面外変位が連成する面外振動(flexural mode・thickness-shear mode と breathing mode)に大別され、それぞれの固有振動に対して厚さ方向の波数が存在し、中央面($z = h/2$)に関して逆対称なモード(A)と対称なモード(S)に分類することができる。文献 1)と文献 2)を参考にして計算した無次元固有振動数 $\Gamma = \omega(a^2/h)(\rho/E)^{1/2}$ の厳密解の値とその振動モードを表-1 に示す。ここで、記号 A1 は面外振動の逆対称 1 次モードを、記号 MS2 は面内振動の対称 2 次モードを意味する。これより、本研究で計算している厳密解の妥当性が確認できる。

4. 数値実験および考察

数値実験では、ポアソン比 $\nu = 0.3$ に設定した。また、要素分割数は、 $m_x \times m_y \times m_z$ で表す。ここで、 m_x, m_y, m_z は、それぞれ、 x, y, z 方向の要素分割数を意味する。

図-2 と図-3 は、それぞれ、 $h/a = 0.1$ と $h/a = 0.5$ である弾性体の無次元固有振動数 $\Omega = \omega a(\rho/E)^{1/2}$ の収束性に与える要素分割数 $m_x \times m_y \times m_z$ と要素タイプの影響を示したものである。これより、要素タイプに係わらず、要素分割数を増大させると Ω の値は小さくなり、

表-2 有限要素法のモード分解能

h/a	SOLID185	SOLID186
0.1	510 (720,762)	4,200 (684,531)
0.5	589 (544,428)	2,508 (413,403)

ある値に収束する。ここで、有効数字 3 桁で収束した Ω のみを指標として、各要素において最も密に要素分割したときの有限要素法のモード分解能を表-2 に纏めた。括弧内の数値は自由度数である。1 次要素は、かなり密に要素分割をし、自由度数が非常に大きいものにも係わらず、その分解能は低い。他方、2 次要素は、1 次要素よりもやや少ない自由度数で、分解能はかなり高くなっている。なお、厳密解との比較を通して得られる詳細な分解能については、当日発表する。

謝辞：本研究の一部は、公益社団法人 LIXIL 住生活財団 2016 年度調査研究助成を受けて行われています。

参考文献

- 1) Lee and Reismann: Int. J. Eng. Sci. 7, pp.93-113, 1969.
- 2) Srinivas et al.: J. Sound Vib. 12, pp.187-199, 1970.
- 3) Saidi et al.: Acta Mech. 208, pp.227-235, 2009.
- 4) Vel and Batra: J. Sound Vib. 272, pp.703-730, 2004.