

軸方向に傾斜機能を有する線構造部材の線形座屈固有値問題の解析手法

大分工業高等専門学校	学生会員	○山本寧音
大分工業高等専門学校	正会員	名木野晴暢
豊橋技術科学大学	非会員	足立忠晴
金沢大学	非会員	樋口理宏

1. まえがき

傾斜機能材料が開発されて以来、傾斜機能材料からなる各種構造部材の力学的挙動の解明が活発に行われている¹⁾。傾斜機能材料の開発された経緯もあって、当初は、薄肉構造部材を対象とし、板厚・殻厚方向に傾斜機能を有するものが対象とされてきたが、最近では、軸方向に傾斜機能を有する棒、梁や柱のような線構造部材（以下、傾斜機能線構造部材）についても研究が行われるようになってきた。傾斜機能材料は、材料特性が連続的、または段階的に変化する不均質材料であるので、圧縮力が作用し続ける環境下においては、その座屈安定性を把握しておくことが重要になる。

傾斜機能線構造部材の座屈安定問題の基礎方程式は、変数係数の4階線形同次常微分方程式であるので、任意の材料特性分布に対する厳密解を得ることは容易でない。よって、何らかの離散化手法により基礎方程式を近似的に解く必要がある。有限要素法は、汎用性の高い強力なツールであるが、材料特性の滑らかな変化を正確に反映することが難しく、精度の良い近似解を得るためには多くの要素分割を必要とする²⁾。また、材料特性が不均質になるため、部材自身の自重による座屈安定性についても明らかにしておく必要があると考えられるが、先行研究例が見当たらない。

そこで、本研究では、材料特性の分布を与えれば、圧縮集中力の作用、または部材の自重による傾斜機能線構造部材の線形座屈固有値問題を解析できる離散化手法を構築することを目的とし、その数値解の収束性、解析精度、離散化条件や自由度数について検討した。

2. 数値実験モデル

図-1に、圧縮力を受ける傾斜機能線構造部材と座標系を示す。ここで、 L は長さ、 A は断面積、 I は断面二次モーメントであり、 $w(x)$ は面外変位である。傾斜機能線構造部材は線形弾性であるとし、その挙動は微小変形を仮定する。

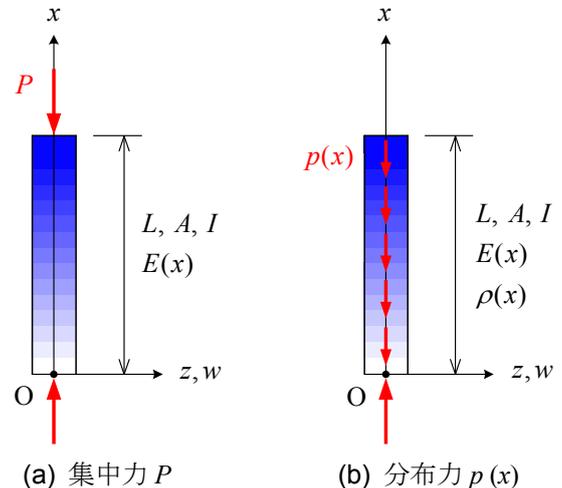


図-1 圧縮力を受ける傾斜機能線構造部材と座標系

x 軸方向の縦弾性係数と密度の分布は、

$$E(x) = E_0 \Phi_E(x), \quad \rho(x) = \rho_0 \Phi_\rho(x), \quad (1)$$

と仮定する。ここで、 E_0 は基準縦弾性係数、 ρ_0 は基準密度であり、 $\Phi_E(x)$ と $\Phi_\rho(x)$ は、それぞれ、縦弾性係数と密度の分布を表す関数（以下、形状関数）である。これより、分布力 $p(x)$ を次のように設定すれば、部材の自重による座屈安定問題を取り扱うことができる。

$$p(x) = -\rho(x)gA. \quad (2)$$

ただし、 g は重力加速度である。なお、通常、縦弾性係数と密度の分布には関係性があるが、現段階ではこれらの分布を独立させている。また、図中の線構造部材の色は、材料特性の変化を表している。

3. 傾斜機能線構造部材の座屈固有値問題の定式化

傾斜機能線構造部材のひずみエネルギー U と、圧縮軸力 $N(x)$ による外力ポテンシャル V は、それぞれ、次式で与えられる。

$$U = \frac{E_0 I}{2} \int_0^L \Phi_E(x) \left\{ \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right\}^2 dx. \quad (3)$$

$$V = \frac{N_0}{2} \int_0^L \Phi_N(x) \left\{ \frac{dw(x)}{dx} \right\}^2 dx. \quad (4)$$

ただし、 N_0 は基準軸力であり、 $\Phi_N(x)$ は軸力の分布を

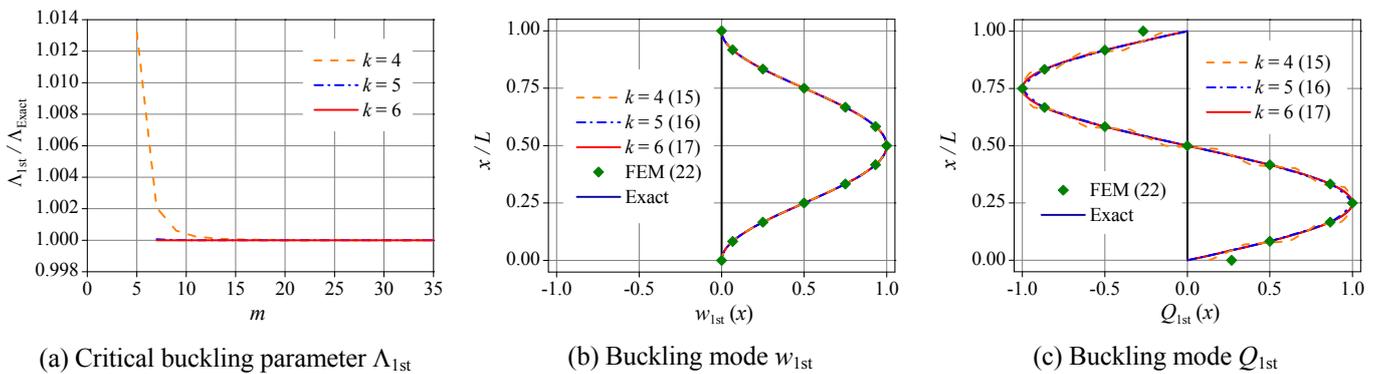


図-3 等質・等方な線構造部材の座屈荷重パラメータ Λ_{1st} とその座屈モードの収束性と妥当性

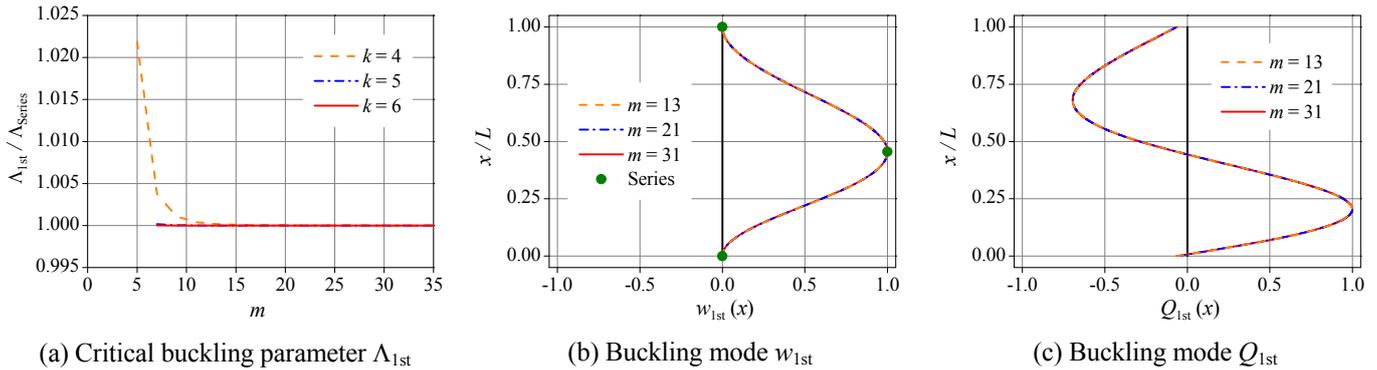


図-4 自重による等質・等方な線構造部材の座屈荷重パラメータ Λ_{1st} とその座屈モードの収束性と妥当性

表す形状関数である。なお、試行関数には、正規化された B-spline 関数を用いた。汎関数 $\Pi = U + V$ を未定係数で極値化すれば、次の代数方程式を得る。

$$(\mathbf{K} - \Lambda \mathbf{G})\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}, \quad \Lambda = \frac{N_0^\alpha L^2}{E_0 I}. \quad (5)$$

ここで、 Λ は座屈荷重パラメータである。これより、 $E(x)$ と $\rho(x)$ を設定すれば、任意の材料特性分布を有する線構造部材の集中力の作用または部材の自重による座屈荷重と、これに対応する座屈モードを統一的に解析することができる。

4. 数値実験および考察

ここでは、 $E(x)$ と $\rho(x)$ ($N(x)$) を等質・等方な材料に設定し、数値解の収束性や精度比較を通して、作成したコードが正しく機能しているかを確認する。例えば、集中力 P を受ける等質・等方な線構造部材の座屈安定問題では、次のように設定すればよい。

$$\Phi_E(x) = 1, \quad N_0 = -P, \quad \Phi_N(x) = 1. \quad (6)$$

図-3 と図-4 は、それぞれ、集中力と自重の作用による等質・等方な線構造部材の座屈荷重パラメータ Λ_{1st} とその座屈モード（面外変位モード w_{1st} とせん断力モード Q_{1st} ）の収束性と妥当性を示したものである。ここで、 k は spline 階数、 m は区分点の数であり、支持

条件は両端固定とした。集中力の問題は厳密解 (Exact) および有限要素解 (FEM) と、自重の問題はべき級数解 (Series)³⁾と比較することで数値解の妥当性を検証した。なお、図-3 の括弧内の数字は、自由度数である。

図-3 と図-4 より、 Λ_{1st} の値は、 m と k の増大にもなると、一定値への安定した収束状態を示している。また、座屈モード w_{1st} , Q_{1st} の収束も良好であり、 $k=6$, $m=13$ に設定すれば、自由度数 17 で精度の高い結果が求められている。数値実験を通して、作成したコードの(1) 支持条件の入力、(2) 軸力分布 (密度分布) の入力、(3) 座屈荷重と面外変位からせん断力までの座屈モードの計算と出力、は正しく機能していることが確認できた。なお、 $E(x)$ と $\rho(x)$ の分布を不均質に設定した場合の数値解の妥当性については、当日報告する。

謝辞：本研究の一部は、LIXIL 住生活財団 2013 年度調査研究助成および前田記念工学振興財団 平成 27 年度研究助成を受けて行われました。

参考文献

- 1) Birman and Byrd: Appl. Mech. Rev., pp. 195-216, 2007.
- 2) Liang et al.: J. Sound Vib., pp.2649-2663, 2014.
- 3) 杉山ら：機械学会論文集, pp. 4435-4443, 1977.