

鹿児島大学 学生会員 ○橋之口剛
鹿児島大学 正会員 酒匂一成

1.はじめに

有限要素法を用いて不飽和浸透流解析の定式化の際に、質量マトリックスが生じる。質量マトリックスは不飽和浸透解析において、不飽和土の浸透特性の非線形性の影響を受ける。質量マトリックスの構成法に、整合質量マトリックス(Consistent mass matrix)法、および Neuman(1973)により提案された集中質量マトリックス(Lumped mass matrix)法¹⁾があり、いずれも解析の収束性や精度などに影響を与える。

著者らは、不飽和土の浸透特性として間隙モデル²⁾を用いた不飽和浸透解析を行っている。本論文では、間隙モデルを用いた不飽和浸透解析において、整合質量マトリックス法と集中質量マトリックス法の2通りの構成法を用いた解析を行い、各計算結果が示す精度について考察する。

2.不飽和浸透解析の支配方程式

本論文における不飽和浸透解析の支配方程式として Richards の式を用い、支配方程式の離散化には Galerkin 法を利用した。また、形状関数や積分方法の選択として、アイソパラメトリック要素を採用し、4点のガウス積分を行っている。離散化後の式をマトリックス表示した式を次式に示す。

$$[A_{ij}]\{\varphi\} + [F_{ij}]\left\{\frac{d\psi}{dt}\right\} - \{Q\} = 0 \quad (1)$$

ここに、 $[A_{ij}]$:全体剛性マトリックス、 $[F_{ij}]$:全体質量マトリックス、 $\{Q\}$:全流量ベクトル、 $\{\psi\}$:時間 t における圧力水頭、 i, j :節点番号。

非線形の反復解法には Picard 法³⁾を適用する。また、不飽和浸透解析のプログラムは、I.M.Smith らによる FEM ライブラリ⁴⁾をもとに作成した。

3.質量マトリックスの構成法

要素質量マトリックス $[F_{ij}]^e$ は次式で表される。

$$[F_{ij}]^e = \int_{\Omega} [N]^T [N] J d\xi d\eta \quad (2)$$

ここに、 β :(=1:不飽和時, 0:飽和時)、 S_s :比貯留係数、 C :比水分容量、 $[N]$:形状関数、 J :ヤコビアンマトリッ

クの行列式、 ξ, η :局所座標系の座標。

要素質量マトリックスを求めるための積分方法としてガウス積分を用いており、式(2)は次式のようにになる。本論文ではガウス積分点を4点とした。

$$[F_{ij}]^e = \sum_{j=1}^4 w_{Gj} (\beta S_s + C_j) [N]^T [N] J \quad (3)$$

ここに、 w_{Gj} :ガウス積分点 j における重み、 C_j :ガウス積分点における比水分容量。

式(3)は、整合質量マトリックス法であり、式中の係数 $(\beta S_s + C_j)$ については、ガウス積分点上における内挿値を用いたものである。式(3)による計算結果を次章の Case1 として示す。

また、式(2)の係数 $(\beta S_s + C)$ が要素内で平均値をとるとし、式(2)に整合質量マトリックス法を適用すると次式のようにになる。

$$[F_{ij}]^e = (\overline{\beta S_s + C}) \sum_{j=1}^4 w_{Gj} [N]^T [N] J \quad (4)$$

式(4)による計算結果を Case2 とする。また、整合質量マトリックス法によって求めた要素質量マトリックスは非対角項にもゼロ以外の値が入った要素質量マトリックスとなる。

式(2)に Neuman(1973)の提唱する集中質量マトリックス法を適用し、係数 $(\beta S_s + C)$ が要素内で平均値をとるとすると要素質量マトリックスは次式で表される。

$$[F_{ij}]^e = \frac{(\overline{\beta S_s + C}) V^e |J|}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここに、 V^e :要素体積。

式(5)による計算結果を Case3 として示す。なお、集中質量マトリックス法による要素質量マトリックスは対角行列となる。

4.計算結果

表-1、図-1 に示す信楽産まさ土の入力値を用いて、間隙モデルにより水分特性曲線および飽和度-不飽和・飽和透水係数関係を求めた(図-2)。図-3 に解析領域と

初期条件, 境界条件を示す。解析領域は横幅 40cm, 高さ 50cm とし, 10cm 四方の要素で分割した。境界条件は側面を非排水条件, 底面に 100cm の圧力水頭一定条件を与えた。初期条件として, -50cm の圧力水頭を各節点に与えている。また, 計算結果として, 供試体中央部の各節点の圧力水頭分布を圧力水頭 0cm の位置が高さ 10cm 上昇する毎に示した。

図-4 より, Case1 では浸潤面の上部の不飽和域において初期条件として与えた圧力水頭が, 初期値より更に低い値を示す結果が得られた。これは, 浸透過程において不飽和域の要素が更に乾燥することを意味しており, 圧力水頭の挙動としては不自然である。Case2 においても, 圧力水頭が低下する現象が見られるが, 低下の程度は Case1 よりも小さくなり, 係数($\beta S_e + C$)の計算法が精度に影響しているといえる。Case3 では, 圧力水頭が低下する現象は改善され, 精度がよい結果となった。

5.おわりに

本論文では間隙モデルによる浸透特性を用いた不飽和浸透解析における質量マトリックスの構成法について検証し, 今回の解析では集中質量マトリックス法を用いることで, 解析結果が安定し計算精度が向上することが分かった。今後, 実験結果との比較により妥当性の検証を行いたい。

参考文献: 1) S. P. Neuman: Saturated-Unsaturated Seepage by Finite Elements, Journal of the Hydraulics Division, pp.2233-2250, 1973.
 2) K.Sako and R.Kitamura: A Practical Numerical Model for seepage Behavior of Unsaturated Soil, Soils and Foundations, Vol.46, pp.595-604, 2006.

表-1.間隙モデルの入力値

土粒子の密度(g/cm ³)	2.628
間隙比	0.725
透水係数(cm/sec) (飽和度 75.3%時)	7.02×10 ⁻³

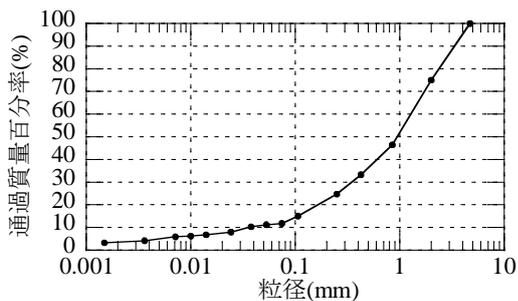


図-1.粒径加積曲線

3) P.S.フヤコーン, G.F.ピンダー, 赤井浩一訳監修: 地下水解析の基礎と応用, 上巻, 基礎編, 現代工学社, pp.168-170, 1987.
 4) I. M. Smith and D. V. Griffiths: Programming The Finite Element Method, Forth Edition, John Wiley & Sons, pp.349-335, 2004.

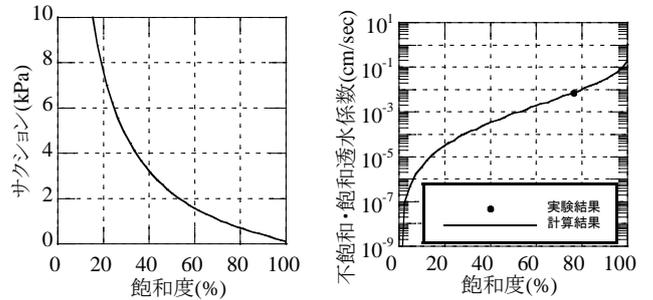


図-2.土の浸透特性

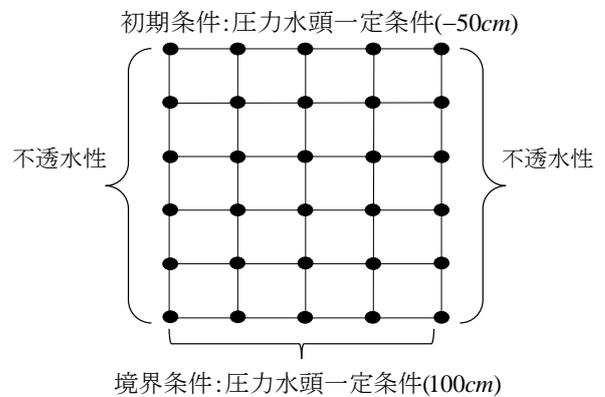
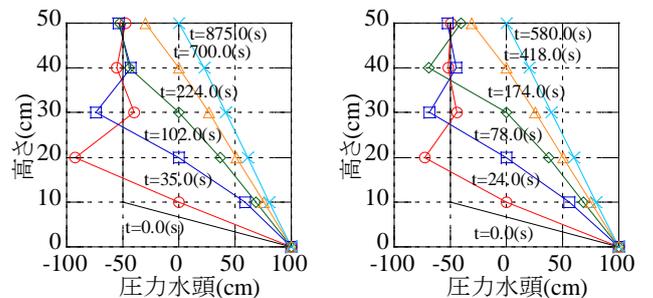
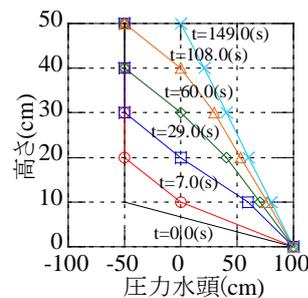


図-3.解析領域



(a)Case1

(b)Case2



(c)Case3

図-4.各計算法による計算結果