

# 表面力を受ける弾性基礎上の矩形板の曲げ問題における 古典理論と Mindlin 理論の適用範囲について

|            |       |        |
|------------|-------|--------|
| 大分工業高等専門学校 | 学生会員  | ○志賀 有人 |
| 大分工業高等専門学校 | 正 会 員 | 名木野晴暢  |
| 大同大学       | 正 会 員 | 水澤 富 作 |
| 北海道大学      | F 会 員 | 三 上 隆  |

## 1. まえがき

変位型の一次せん断変形理論である Mindlin 理論は、薄板理論(古典理論)に設けられている法線保持の仮定の直交保持条件を排除し、断面の回転角を未知量とすることで面外せん断変形の影響を考慮した厚板理論である。Mindlin 理論は種々ある厚板理論の中で最も簡易かつ簡便で、実務設計などでの実用性が十分にある。しかし、変位場の仮定から古典理論と Mindlin 理論には必ず適用限界が存在するため、構造設計を担当する技術者はこれを十分に理解しておく必要がある。

著者ら<sup>1)</sup>は弾性基礎上の矩形板の曲げ問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲を明らかにすることを目的とし、その第一段階として矩形板に作用する面外荷重を物体力に限定した検討を行い、次のことを明らかにしている。

- (1) 薄板( $0.01 \leq h/a < 0.1$ )の曲げ問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲は無次元地盤反力係数  $\Theta \leq 10^{-4}$  である。
- (2) 中等厚板から厚板( $0.1 \leq h/a \leq 0.5$ )の曲げ問題における Mindlin 理論の適用範囲は無次元地盤反力係数  $\Theta \leq 10^{-2}$  である。

本論文では先に述べた研究目的を達成するための第二段階として、面外荷重を板上面に作用する表面力とし、文献 1) と同様の検討を行った。

## 2. 解析モデル

図-1 には弾性基礎上の矩形板、座標系および変位方向の定義が示してある。ここで、等質・等方な矩形板は微小変形かつ線形弾性であるとし、その周面は単純支持されているとする。また、弾性基礎は Winkler 基礎でモデル化し、表面力は全面等分布荷重  $q_0$  とする。さらに、 $a$  は板の長さ、 $b$  は幅、 $h$  は厚さ、 $u, v, w$  は、それぞれ、 $x, y, z$  方向の変位成分であり、 $k_1$  は Winkler 基礎の地盤反力係数である。

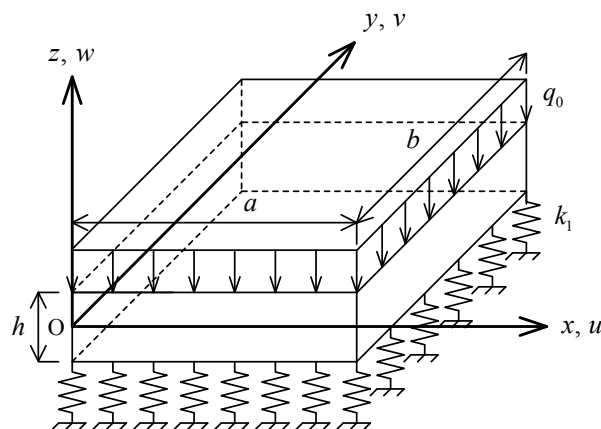


図-1 表面力を受ける矩形板と直交座標系

## 3. 三次元弾性論に基づく基礎方程式と境界条件

先に説明した解析モデルに対応する三次元弾性論に基づく矩形板の基礎方程式は、次式で与えられる<sup>2)</sup>。

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} &= 0, & \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} &= 0, \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 $\nabla^2$  は三次元の Laplace の演算子、 $e$  は体積ひずみであり、 $\nu$  はポアソン比である。

矩形板の周面が単純支持されているとすれば、次の境界条件を満足しなければならない<sup>2)</sup>。

$$v = w = 0, \quad \sigma_x = 0; \quad (x = 0, a). \quad (2)$$

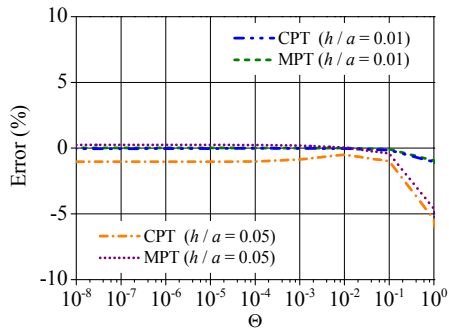
$$u = w = 0, \quad \sigma_y = 0; \quad (y = 0, b). \quad (3)$$

また、矩形板の上面と下面での境界条件は、次のように与えられる<sup>2)</sup>。

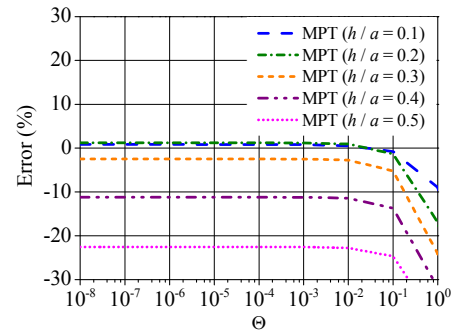
$$\sigma_z = -q_0, \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0; \quad (z = +h/2). \quad (4)$$

$$\sigma_z = k_1 w, \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0; \quad (z = -h/2). \quad (5)$$

本研究では Fourier 解析を用いて矩形板の変位、応力およびひずみエネルギーの解析解を導出しているが、その詳細は文献 2) を参照されたい。また、古典理論と Mindlin 理論に基づく基礎方程式と境界条件、その解析解の導出は文献 1) と同様であるので、本論文では割愛する。

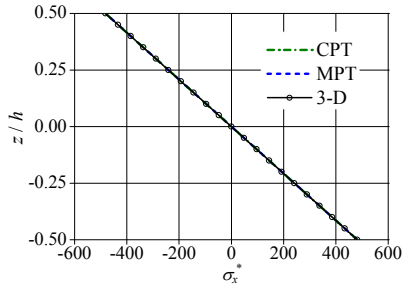


(a) 薄板 ( $0.01 \leq h/a < 0.1$ )

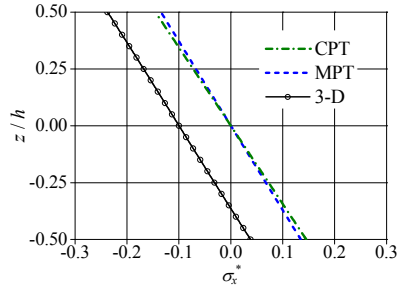


(b) 厚板 ( $0.1 \leq h/a \leq 0.5$ )

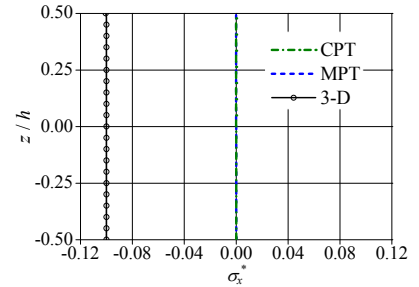
図-2 矩形板の全ひずみエネルギーの相対誤差に与える無次元地盤反力係数 $\Theta$ と板厚比 $h/a$ の影響



(a)  $\Theta = 10^{-4}$

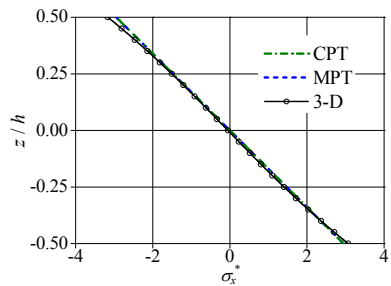


(b)  $\Theta = 10^{-2}$

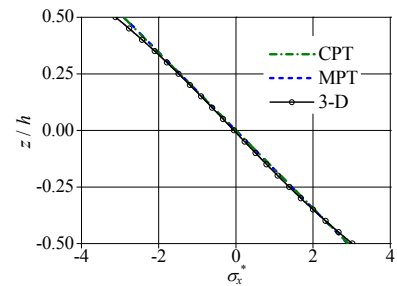


(c)  $\Theta = 10^0$

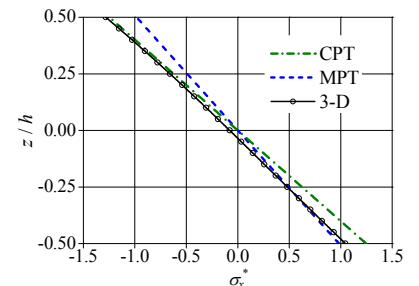
図-3 Winkler 基礎上の薄板の $x$ 軸方向応力 $\sigma_x^*$ の板厚方向分布の理論比較： $h/a = 0.01$



(a)  $\Theta = 10^{-4}$



(b)  $\Theta = 10^{-2}$



(c)  $\Theta = 10^0$

図-4 Winkler 基礎上の中等厚板の $x$ 軸方向応力 $\sigma_x^*$ の板厚方向分布の理論比較： $h/a = 0.3$

#### 4. 理論解析および考察

理論解析では正方形板( $b/a = 1$ ), ポアソン比 $\nu = 0.2$ および Mindlin 理論のせん断修正係数 $\kappa = 5/6$ とし, 地盤反力係数を表す無次元量には, 無次元地盤反力係数 $\Theta = k_1 a / E$ を用いる. ただし,  $E$ は矩形板の縦弾性係数である. なお, 三次元弾性論(3-D)に基づく解に対する古典理論(CPT)と Mindlin 理論(MPT)に基づく解の相対誤差 Error (%) は, 次のように算出した.

$$\text{Error (\%)} = \frac{(\text{CPT or MPT}) - (3\text{-D})}{3\text{-D}} \times 100 \quad (6)$$

Winkler 基礎上にある矩形板のひずみエネルギーの相対誤差に与える無次元地盤反力係数 $\Theta$ と板厚比 $h/a$ の影響を図-2 に示す. また, 図-3 と図-4 は, それぞれ, 薄板( $h/a = 0.01$ )と厚板( $h/a = 0.3$ )の $x$ 軸方向応力 $\sigma_x^* = \sigma_x / q_0$ の板厚方向分布の理論比較の結果である. これらの結果より, 次の結論を得ることができる.

- [1] 全面等分布荷重を受ける薄板( $0.01 \leq h/a < 0.1$ )の曲げ問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲は物体力を受ける場合と同様である.
- [2] 全面等分布荷重を受ける厚板( $0.1 \leq h/a \leq 0.3$ )の曲げ問題における Mindlin 理論の適用範囲は無次元地盤反力係数 $\Theta \leq 10^{-2}$ である.

#### 5. あとがき

本論文では, 表面力として全面等分布荷重を受ける弾性基礎上の矩形板の曲げ問題における古典理論と Mindlin 理論の適用範囲を明らかにした.

#### 参考文献

- 1) 志賀ら: 第一回九州橋梁・構造工学研究会シンポジウム論文集, pp.56-64, 2012.
- 2) 名木野ら: 構造工学論文集, Vol.58A, pp.26-39, 2012.