

非線形波動方程式系に基づく表面孤立波及び内部孤立波の数値解

鹿児島大学大学院理工学研究科 学生会員 山下 啓
鹿児島大学大学院理工学研究科 正会員 柿沼太郎

1. 研究の目的: 表面波, または, 内部波を解析するために, 様々な非線形波動方程式が提案されている. しかしながら, 例えば, KdV 理論は, 孤立波解やクノイド波解を与えるが, 摂動法を用いる導出時の仮定に伴い, 波高水深比や水深波長比等に対して適用限界を有する. これに対して, 柿沼 (2001) によって提案された非線形波動方程式系は, 波の非線形性及び分散性に対して何ら仮定を用いずに導出されているため, 特に, 密度成層が発達した水域において観測されるような大振幅の内部波の解析に適していると考えられる. ところが, これまで, 本方程式系の定常波に対する解析解が得られておらず, そのため, 入射波としては, 理論解 (中山ら, 2010) が用いられていた. 従って, 理論解の適用範囲を超える大振幅の定常波の解析は, 困難であった. そこで, 本研究では, 非線形波動方程式系に対する定常波解を求めるための数値解析手法を提案する. そして, 得られた数値解を理論解と比較し, 非線形波動方程式系の解の妥当性を調べる.

2. 基礎方程式系及び数値解析手法: 非粘性・非圧縮性である多層流体の, 非回転運動を対象とする. 各層の速度ポテンシャルを $\phi_i(x, z, t) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \{f_{i,\alpha}(x, t) \cdot z^\alpha\}$ のように, N 個のべき関数の重み付き級数に展開し, 変分原理を用いて得られる非線形波動方程式系を基礎方程式系とする (山下ら, 2012). 孤立波のような定常波の場合, 物理量が, 一定速度 C で進行するため, $\partial F / \partial t = -C \partial F / \partial x$ が成り立つ. ここで, F は, 水面変動 ζ , 界面変動 η , または, 速度ポテンシャルの重み係数 $f_{i,\alpha}$ である. この移流方程式を非線形波動方程式系の時間微分項に代入すると, 定常波に対する, 位相速度 C をパラメータとする非線形波動方程式系が得られる. これを満足する, 静水状態以外の解が, 波速 C を有する定常波解である. 振幅の比較的小さな定常波の理論解と数値解は, ほぼ等しくなることが予想されるため, まず, 振幅の小さな理論解を初期値とし, Newton-Raphson 法を適用して, 静水状態以外の, 理論解に近い定常波の数値解を求める. そして, 得られた解を初期値とし, パラメータである波速を少しずつ大きくしていくことにより, 波速に応じた定常波の数値解を順次得ることができる. なお, 時間発展を行わない本計算において, 移流項の離散化には, 中央差分を用いることにする.

3. 表面孤立波解: 一樣静水深 h の水域における表面波を対象とする. 図-1 に, 本モデル及び KdV 理論に基づく表面孤立波の波形を示す. 波高水深比 a/h が大きいほど, 数値解と KdV 理論解の差異が大きい. 特に, $a/h = 0.7$ の場合, 数値解は, KdV 理論解よりも尖った峰の形状を示している. 図-2 は, $a/h = 0.66$ である孤立波解の 1 次元伝播を山下ら (2012) の数値モデルを用いて時間発展させて解いた結果である. これより, ここで提案した手法を適用して数値的に求めた, 比較的大きな振幅の孤立波解が, 安定して伝播することが確認できる. 図-3 に, 波高水深比 a/h と無次元波速 C/C_{s0} の関係を示す. ここで, C 及び C_{s0} は, それぞれ, 孤立波及び線形浅水波の波速である. 孤立波の最大振幅とされる $a_{\max}/h = 0.732$ と同程度の $a/h = 0.72$ である孤立波解が得られている. 図-4 に, a/h と相対代表波長 λ_1/h の関係を示す. ここで, $\lambda_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta dx / a$ である. 数値解の波長は, 理論解の波長よりも, やや長くなっている.

4. 内部孤立波解: 固定水平板で挟まれた 2 層流体を対象とする. 上・下層の層厚比及び密度比が, それぞれ, $h_1/h_2 = 0.25$ 及び $\rho_1/\rho_2 = 0.98$ であり, 全水深が, h であるとする. 図-5 に, 本手法による内部孤立波の波形の数値解を示す. ここで, 3 次理論解 (中山ら, 2010) と比較している. 振幅が大きくなるほど, 数値解と 3 次理論解の差異が大きく, 数値解の波形は, 台形状に近づく. 図-6 は, この台形状の大振幅内部孤立波の 1 次元伝播の数値解析結果であるが, 安定して伝播している. 図-7 及び図-8 に, それぞれ, $|a|/h$ と, C/C_{i0} 及び λ_1/h との関係を示す. ここで, C_{i0} は, 線形内部浅水波の波速である. 本計算条件に対する内部孤立波の最大振幅とされる $a/h = -0.3$ と同程度の大きな振幅の内部孤立波が得られた. また, 数値解と Choi and Camassa (1999) の結果は, ほぼ一致しており, 最大波速は, 共に $1.25 C_{i0}$ に漸近する. 図-9(a) 及び (b) に, $a/h = -0.28$ の場合の, 水平方向流速及び鉛直方向流速を示す. u/C 及び w/C の最大値は, それぞれ, 0.6 及び 0.2 である.

5. 結 論: 非線形波動方程式系に基づく表面孤立波及び内部孤立波の数値解を求める手法を提案し, 数値解と理論解を比較した. その結果, 理論解の最大振幅と同程度の振幅を有する大きな振幅の孤立波の数値解を得た. また, 山下ら (2012) のモデルが, 内部長波を高い精度で再現することを示した. 今後, 周期解や深水域の定常波に対して, 本手法を適用したい.

参考文献

- 柿沼太郎: 透水性海浜における内部波の挙動の数値計算, 海岸工学論文集, 第 48 巻, pp. 146-150, 2001.
中山恵介・柿沼太郎・及川正行・辻 英一・丸谷靖幸: 内部ソリトン波の 3 次オーダー解による再現性の検討, 土木学会論文集 B2 (海岸工学), Vol. 66, No. 1, pp. 1-5, 2010.
山下 啓・柿沼太郎・山元 公・中山恵介: マッハシステム形成過程の数値解析, 土木学会論文集 B2 (海岸工学), Vol. 68, No. 2, pp. 6-10, 2012.
Choi, W. and R. Camassa: Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system, J. Fluid Mech., Vol. 396, pp. 1-36, 1999.

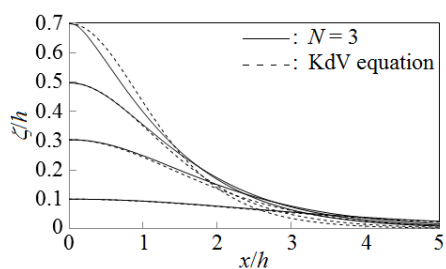


図-1 表面孤立波の波形の数値解及び理論解
(波高水深比 $a/h = 0.1, 0.3, 0.5$, and 0.7)

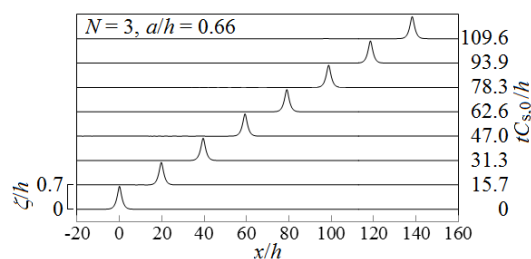


図-2 表面孤立波の数値解が1次元伝播した場合の
各時刻の水面形 (波高水深比 $a/h = 0.66$)

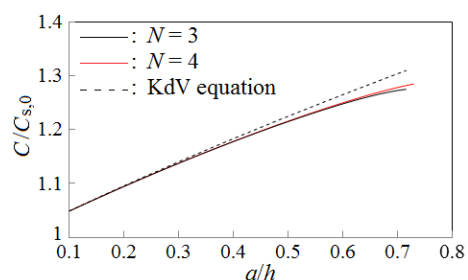


図-3 波高水深比 a/h と相対波速 C/C_{s0} の関係

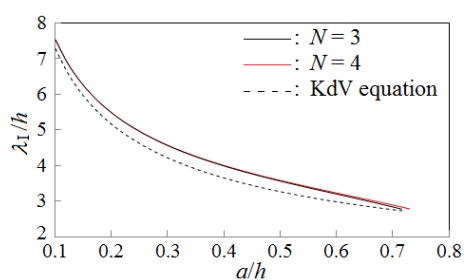


図-4 波高水深比 a/h と相対代表波長 λ_1/h の関係

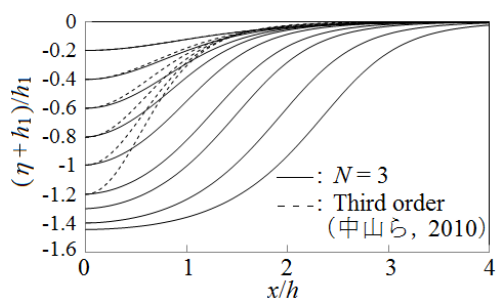


図-5 内部孤立波の波形の数値解及び理論解

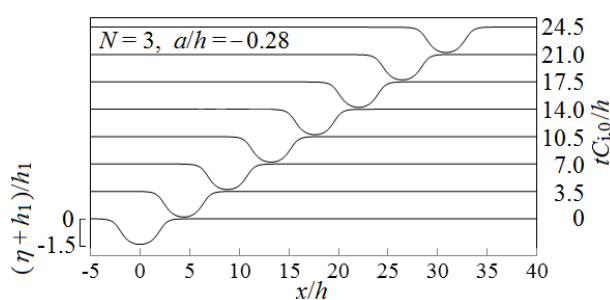


図-6 内部孤立波の数値解が1次元伝播した場合の
各時刻の界面形 (波高水深比 $a/h = -0.28$)

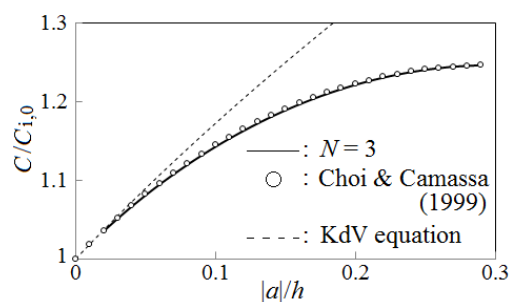


図-7 波高水深比 $|a|/h$ と相対波速 C/C_{i0} の関係

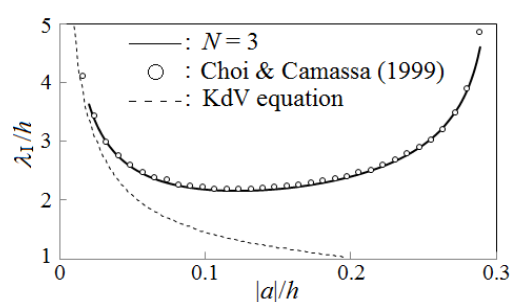
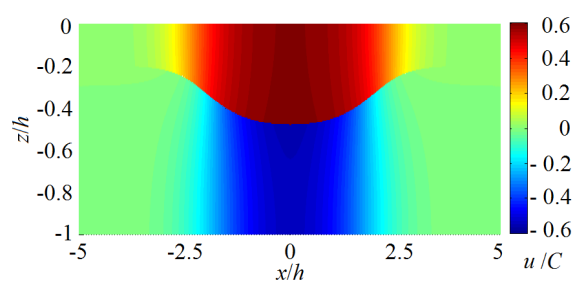
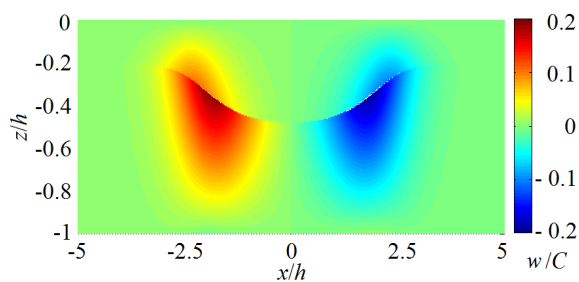


図-8 波高水深比 $|a|/h$ と相対代表波長 λ_1/h の関係



(a) 水平方向流速 u の分布



(b) 鉛直方向流速 w の分布

図-9 内部孤立波の流速分布 (波高水深比 $a/h = -0.28$; C は、内部孤立波の波速である.)