

B-spline Ritz 法による部分等分布荷重を受ける 弾性基礎にある矩形厚板の三次元曲げ問題の解析

大分工業高等専門学校	学生会員	○大川 茉友子
大分工業高等専門学校	正 会 員	名 木 野 晴 暢
豊橋技術科学大学	非 会 員	足 立 忠 晴
大同大学	正 会 員	水 澤 富 作
北海道大学	F 会 員	三 上 隆

1. まえがき

地盤－構造関連問題である弾性基礎にある矩形厚板の静力学的特性（変形状態，変位や応力分布特性）を明らかにすることは，種々の工学分野において重要である．名木野ら^{1), 2), 3)}は，弾性基礎にある矩形厚板の静力学的特性を三次元弾性論に基づいて明らかにしてきた．しかし，文献1)，文献2) および文献3) は，Fourier 解析を用いているため，支持条件が周面単純支持に限定されていた．そこで，大川ら^{4), 5)}は，任意の支持条件を取り扱える B-spline Ritz 法⁶⁾を用いて，物体力または全面等分布荷重を受ける弾性基礎にある矩形厚板の三次元曲げ問題を解析している．

本論文の目的は，(1) 部分等分布荷重を受ける弾性基礎にある任意の支持条件を有する矩形厚板の三次元曲げ問題への B-spline Ritz 法⁶⁾の適用性を検討すること，(2) 部分等分布荷重を受ける弾性基礎にある矩形厚板の静力学的特性に与える板厚と支持条件の影響を明らかにすること，である．

2. 弾性基礎にある矩形厚板の曲げ問題の定式化

図-1 には，荷重載荷幅 $2c \times 2d$ を有する部分等分布荷重を受ける矩形厚板と直交座標系が示してある．ここで， u, v, w は，それぞれ， x, y, z 方向の変位成分であり，均質・等方な矩形厚板は微小変形かつ線形弾性であるとし，三次元弾性論に基づいて解析する．また，弾性基礎は Winkler 基礎でモデル化する．

弾性基礎にある矩形厚板の曲げ問題の定式化にあたり，次式のような無次元座標系を導入する．

$$\xi = x/a, \eta = y/b, \zeta = z/h \quad (1)$$

無次元変位 $U = u/a, V = v/a, W = w/a$ は，B-spline 関数の三重積で仮定する⁶⁾．

$\bar{U}$ を矩形厚板のひずみエネルギー， $\bar{V}$ を部分等分布荷重による外力ポテンシャルとすれば，地盤－構造系

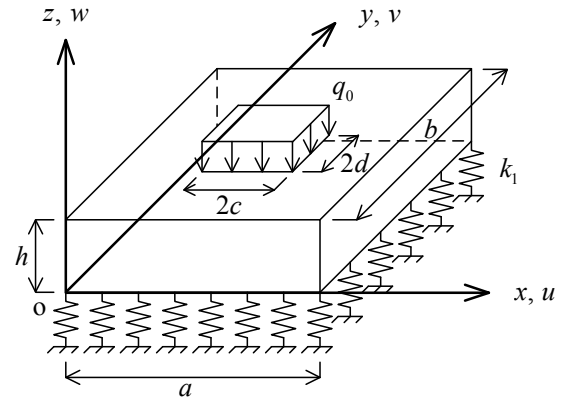


図-1 部分等分布荷重を受ける矩形厚板と直交座標系

の汎関数 Π は， $\Pi = \bar{U} - \bar{V}$ で表される．よって，汎関数 Π を極値化すれば，次式のような代数方程式を得る．

$$([K_P] + [K_F])\{\Delta\} = \{f\} \quad (2)$$

ただし， $[K_P]$ は矩形板の剛性マトリックス， $[K_F]$ は弾性基礎の剛性マトリックス， $\{f\}$ は外力ベクトルであり， $\{\Delta\}$ は未定係数ベクトルである．

3. 数値計算例および考察

数値計算では，板中央に荷重載荷幅 $2c \times 2d = 0.2a \times 0.2b$ である部分等分布荷重が作用するものとし，辺長比 $b/a = 1$ ，ポアソン比 $\nu = 0.2$ および無次元地盤反力係数 $\Theta \equiv k_1 a / E = 10^{-2}$ を用いた³⁾．また，面外変位と応力は，次のように無次元化している．

$$w^* = \frac{wE}{q_0 a}, \quad \sigma_x^* = \frac{\sigma_x}{q_0} \quad (3)$$

ただし， E は縦弾性係数， q_0 は部分等分布荷重の荷重強度である．

表-1 には，弾性基礎にある周面単純支持矩形厚板の中央点での w^* と σ_x^* に与える spline 次数 $\xi \times \eta \times \zeta$ の影響が示してある．ここで，板厚比 h/a は 0.2 (中等厚板) と 0.5 (厚板) とし，区分点の数を $m_\xi \times m_\eta \times m_\zeta = 21 \times 21 \times 11$ に設定した状態で spline 次数 $\xi \times \eta \times \zeta$ を $3 \times 3 \times 3$ から $5 \times 5 \times 3$ まで変化させている．また，解の精

表-1 弾性基礎にある周面単純支持矩形厚板の変位と応力に与える spline 次数の影響 : $\Theta = 10^{-2}$

h/a	Methods	$\xi \times \eta \times \zeta$	$w^*(\zeta=0)$	$w^*(\zeta=0.5)$	$w^*(\zeta=1)$	$\sigma_x^*(\zeta=0)$	$\sigma_x^*(\zeta=1)$
0.2	Present	$3 \times 3 \times 3$	-7.22×10^{-1}	-7.63×10^{-1}	-8.17×10^{-1}	1.16×10^0	1.47×10^0
		$4 \times 4 \times 3$	-7.22×10^{-1}	-7.63×10^{-1}	-8.17×10^{-1}	1.16×10^0	1.36×10^0
		$5 \times 5 \times 3$	-7.22×10^{-1}	-7.63×10^{-1}	-8.16×10^{-1}	1.16×10^0	1.43×10^0
	C3D8		-7.13×10^{-1}	-7.55×10^{-1}	-8.13×10^{-1}	9.86×10^{-1}	1.41×10^0
	Analytical ³⁾		-7.22×10^{-1}	-7.63×10^{-1}	-8.20×10^{-1}	1.16×10^0	1.50×10^0
0.5	Present	$3 \times 3 \times 3$	-6.75×10^{-2}	-9.14×10^{-2}	-2.24×10^{-1}	-1.45×10^{-1}	-7.30×10^{-1}
		$4 \times 4 \times 3$	-6.75×10^{-2}	-9.14×10^{-2}	-2.25×10^{-1}	-1.45×10^{-1}	-6.19×10^{-1}
		$5 \times 5 \times 3$	-6.75×10^{-2}	-9.14×10^{-2}	-2.23×10^{-1}	-1.45×10^{-1}	-6.84×10^{-1}
	C3D8		-6.68×10^{-2}	-9.01×10^{-2}	-2.28×10^{-1}	-1.23×10^{-1}	-5.90×10^{-1}
	Analytical ³⁾		-6.75×10^{-2}	-9.14×10^{-2}	-2.28×10^{-1}	-1.45×10^{-1}	-7.59×10^{-1}

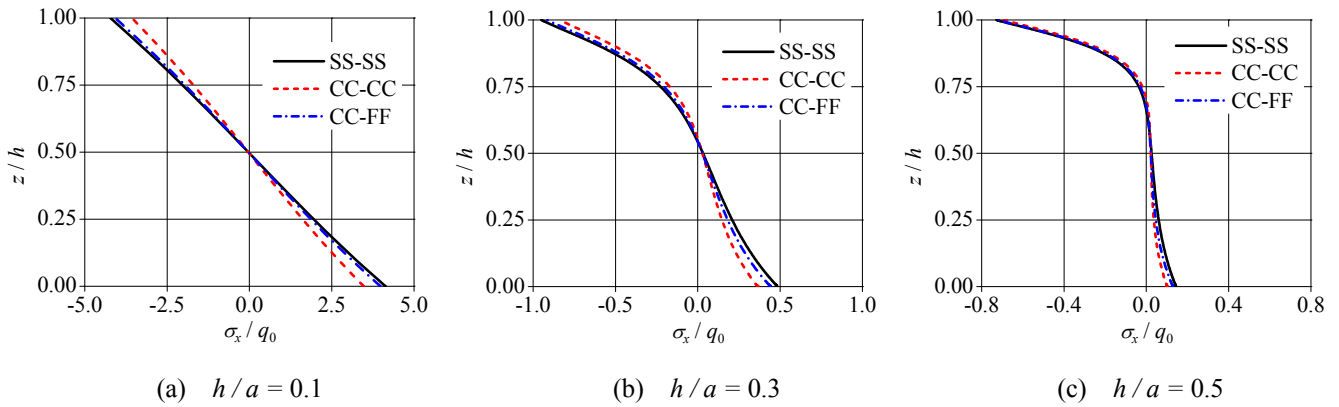


図-2 弾性基礎にある矩形厚板の応力 σ_x^* の板厚方向分布に与える支持条件と板厚比 h/a の影響 : $\Theta = 10^{-2}$

度比較のために、名木野ら³⁾の解析解と汎用有限要素コード ABAQUS 6.11 の一次のソリッド要素 (C3D8) による三次元有限要素解も示してある。なお、有限要素法の要素分割数は $20 \times 20 \times 10$ とした。

これより、spline 次数 $\xi \times \eta \times \zeta$ を高めても板上面 ($\zeta=1$) の応力 σ_x^* の解析精度は改善されず、 h/a が大きくなるとその影響が大きく表れる。これより、B-spline Ritz 法による部分等分布荷重を受ける弾性基礎にある矩形厚板の解析では、spline 次数 $\xi \times \eta \times \zeta$ の設定に注意する必要がある。なお、 h/a に係らず、spline 次数 $\xi \times \eta \times \zeta=3 \times 3 \times 3$ による数値解は、解析解³⁾と良い一致を示している。また、ひずみエネルギーについても同様の検討を行っているが、spline 次数 $\xi \times \eta \times \zeta=3 \times 3 \times 3$ を用いることで良好な結果が得られている。

図-2 に、弾性基礎にある矩形厚板の応力 σ_x^* の板厚方向分布に与える支持条件と板厚比 h/a の影響を示す。ここで、SS-SS は周面単純支持、CC-CC は周面固定、CC-FF は相対二面固定・他二面自由を意味する。これより、中等厚板 ($h/a=0.1$) の応力 σ_x^* の板厚方向分布は支持条件による相違が表れている。しかし、厚板 ($h/a=0.5$) の応力 σ_x^* の板厚方向分布に与える支持条件の影響はほとんど見られない。

4. まとめ

本論文で得られた結果は、次のとおりである。

- (1) B-spline Ritz 法による数値解の解析精度は良好であるが、spline 次数の設定に注意する必要がある。
- (2) 中等厚板の応力 σ_x^* の板厚方向分布は支持条件の影響が表れるが、板厚が大きくなると、応力 σ_x^* の板厚方向分布に与える支持条件の影響はほとんど見られなくなる。

謝辞：本研究は、平成 24 年度豊橋技術科学大学高専連携教育研究プロジェクトの助成を受けて行われました。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 名木野ら：応用力学論文集, Vol.12, pp.43-54, 2009.
- 2) 名木野ら：構造工学論文集, Vol.57A, pp.27-40, 2011.
- 3) 名木野ら：構造工学論文集, Vol.58A, pp.26-39, 2012.
- 4) 大川ら：土木学会西部支部 研究発表会講演概要集 (CD-ROM), I-058, pp.115-116, 2012.
- 5) 大川ら：土木学会第 67 年次学術講演会講演概要集 (CD-ROM), I-610, pp.1219-1220, 2012.
- 6) Nagino et al.: J. Sound Vib., Vol.317, pp.329-353, 2008.