

B-spline Ritz 法による任意の支持条件を有する 傾斜機能矩形板の基本曲げ振動の三次元自由振動解析

大分工業高等専門学校	正 会 員	○名木野晴暢
北海道大学	正 会 員	佐藤太裕
大同大学	正 会 員	水澤 富 作
北海道大学	F 会 員	三 上 隆

1. まえがき

傾斜機能材料 (Functionally Graded Materials) とは、「空間的に一つの機能から他の機能へと連続的または階段的に変化する一体の材料」と定義されており¹⁾、例えば、ある方向の成分傾斜により、材料特性 (縦弾性係数, ポアソン比や密度等) が変化する結合界面が存在しない不均質な複合材料である。

傾斜機能材料は、材料の組み合わせや成分傾斜分布等を制御することで期待する機能を発揮することが可能である。したがって、従来の等質・等方な材料よりも優れた土木構造材料になり得るものと考えられる。また、主要な土木構造部材への傾斜機能材料の積極的な利用にあたっては、傾斜機能材料からなる構造部材の動的負荷下での力学的挙動 (以下、動力学的挙動) の解明が必要不可欠である。

本研究では、傾斜機能材料からなる矩形板 (以下、傾斜機能矩形板) の動力学的挙動の解明において基礎的な情報を提供してくれる自由振動特性を明らかにすることを目的としている。なお、解析には B-spline Ritz 法²⁾を用いた。また、自由振動特性の中で最も重要である基本曲げ振動を対象として解析を行った。

2. 傾斜機能矩形板の三次元自由振動問題の定式化

図-1 には、傾斜機能矩形板と直交座標系が示してある。ここで、 a, b, h は、それぞれ、矩形板の長さ、幅、厚さであり、時間 t に依存する x, y, z 方向の変位成分を、それぞれ、 u, v, w と定義する。また、三次元弾性論に従う傾斜機能矩形板は微小変形かつ線形弾性であるとし、その運動は調和振動を仮定する。

傾斜機能材料の不均質性は板厚方向のみに依存するものとし、本研究では縦弾性係数 $E(z)$ を次のように仮定する (図-2 参照)。

$$E(z) = E_b \exp \{p(z/h)\}, \quad p = \ln(E_t/E_b) \quad (1)$$

ただし、 E_b と E_t は、それぞれ、矩形板の下面および

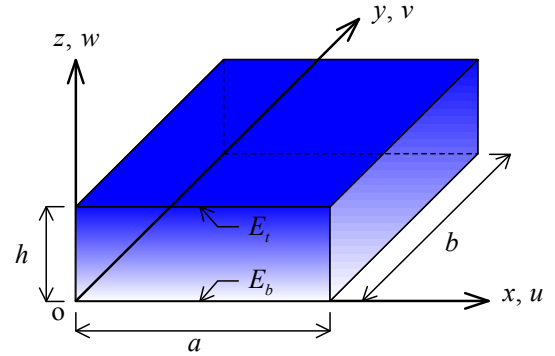


図-1 傾斜機能矩形板と直交座標系

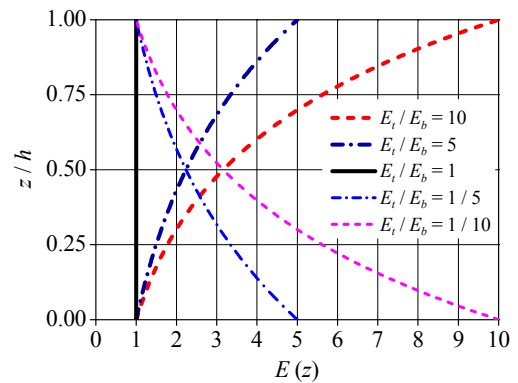


図-2 縦弾性係数の板厚方向分布

上面の縦弾性係数であり、 p は縦弾性係数比 E_t/E_b に依存する材料の不均質性を表すパラメータである。なお、密度 ρ とポアソン比 ν の不均質性は無視する。

傾斜機能矩形板の自由振動問題の定式化にあたり、次のような無次元座標系を導入する。

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad \zeta = z/h \quad (1)$$

無次元振幅変位 $U = u/a, V = v/a, W = w/a$ は、B-spline 関数の三重積で仮定する²⁾。

$U_{\max}$ を傾斜機能矩形板の最大ひずみエネルギー、 $T_{\max}$ を傾斜機能矩形板の最大運動エネルギーとすれば、汎関数 Π は、 $\Pi = U_{\max} - T_{\max}$ で表される。よって、汎関数 Π を極値化すれば、次式のような代数方程式を得る。

$$([K] - \Omega^2[M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (2)$$

ただし、 $\Omega = \omega a (\rho/E_b)^{1/2}$ は振動数パラメータ、 ω は固有円振動数、 $[K]$ は剛性マトリックス、 $[M]$ は質量マトリックスであり、 $\{\Delta\}$ は未定係数ベクトルである。

表-1 傾斜機能矩形板の基本曲げ振動の振動数パラメータの収束性と精度比較： $E_t/E_b = 100$

h/a	Methods	$m_\xi \times m_\eta \times m_\zeta$	D.O.F.	SS-SS	CC-CC	CF-FF
0.2	Present	$11 \times 11 \times 11$	6084	3.352	5.478	0.6294
		$13 \times 13 \times 11$	8100	3.352	5.477	0.6294
		$15 \times 15 \times 11$	10404	3.352	5.477	0.6294
	FEM (C3D8)	$21 \times 21 \times 5$	6615	3.233	5.342	0.6219
		$51 \times 51 \times 11$	85833	3.331	5.454	0.6280
0.5	Present	$11 \times 11 \times 11$	6084	6.335	8.548	1.386
		$13 \times 13 \times 11$	8100	6.335	8.547	1.386
		$15 \times 15 \times 11$	10404	6.335	8.547	1.386
	FEM (C3D8)	$21 \times 21 \times 11$	14553	6.311	8.556	1.390
		$41 \times 41 \times 21$	105903	6.328	8.551	1.387

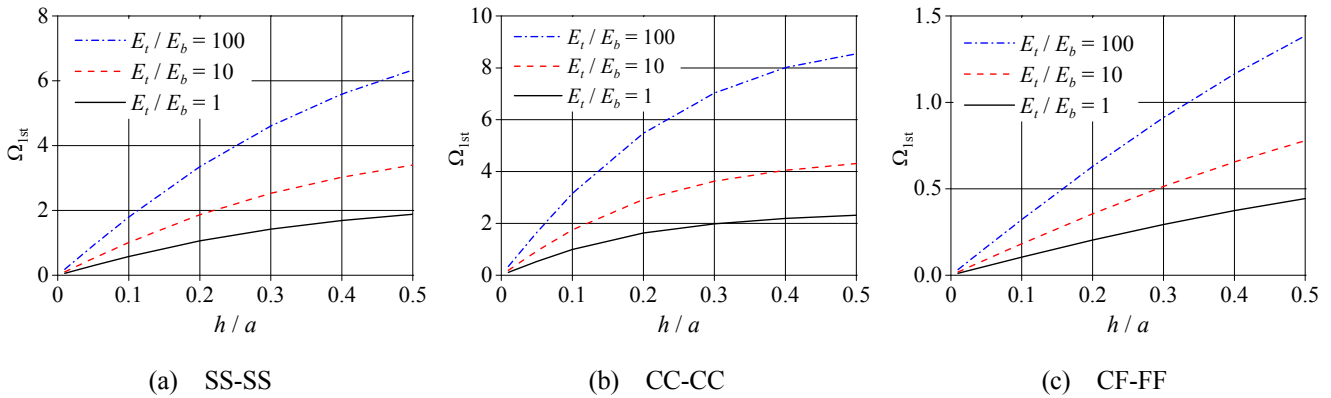


図-2 傾斜機能矩形板の基本曲げ振動の振動数パラメータに与える板厚比，縦弾性係数比および支持条件の影響

3. 数値計算例および考察

ここでは，傾斜機能矩形板の基本曲げ振動に与える板厚比 h/a ，縦弾性係数比 E_t/E_b および支持条件の影響について検討する．数値計算では，辺長比 $b/a = 1$ およびポアソン比 $\nu = 0.3$ を用い，spline 次数 $(k_\xi - 1) \times (k_\eta - 1) \times (k_\zeta - 1) = 4 \times 4 \times 3$ に設定した．

表-1 には，傾斜機能矩形板の基本曲げ振動の振動数パラメータ Ω の収束性と精度比較が示してある．ここで，板厚比 h/a は 0.2 (中等厚板) と 0.5 (厚板) とした．また，解の精度比較のために，汎用有限要素コード ABAQUS 6.11 による数値解 (FEM) も示してある．ここで，C3D8 は一次のソリッド要素を意味し，ソリッド要素が立方体を保つように要素を分割した．なお，表中の D.O.F. は未知数の数，SS-SS は周面単純支持，CC-CC は周面固定および CF-FF は片持を意味する．

これより，B-spline Ritz 法による数値解の収束状態は良好であり， h/a と支持条件に係らず，有効数字四桁で収束値を得ている．また，B-spline Ritz 法は，有限要素法よりもかなり少ない未知数の数で，解析精度の高い上界の結果が得られている．

図-2 には，傾斜機能矩形板の基本曲げ振動の振動数パラメータ Ω_{1st} に与える板厚比 h/a ，縦弾性係数比 E_t/E_b

E_b および支持条件の影響が示してある．

これより， h/a と支持条件に係らず， E_t/E_b が大きくなれば，等質・等方な矩形板 ($E_t/E_b = 1$) よりも Ω_{1st} の値は増大する．具体的には， h/a と支持条件に係らず， $E_t/E_b = 10$ である傾斜機能矩形板の Ω_{1st} は，等質・等方な矩形板の Ω_{1st} の 1.7 倍程度， $E_t/E_b = 100$ であれば 3 倍から 4 倍程度になる．また，拘束が小さいと Ω_{1st} の値は h/a の増大にともなって直線的に増加するが，拘束が大きくなると曲線的に増加する．

4. まとめ

本論文で得られた知見は，以下の通りである．

- (1) B-spline Ritz 法は，有限要素法よりもかなり少ない未知数の数で高い解析精度が得られる．
- (2) h/a と支持条件に係らず， E_t/E_b が大きくなれば，等質・等方な矩形板よりも Ω_{1st} の値は増大する．

参考文献

- 1) 上村ら：傾斜機能材料の開発と応用，pp.1-32，シーエムシー出版，2003．
- 2) Nagino et al.: Journal of Sound and Vibration, Vol.317, pp.329-353, 2008.