幾何学的非線形骨組解析における Timoshenko 梁要素のロバスト性について

佐賀大学大学院　学生会員　徳渕　涼太
正会員　帯屋　洋之
正会員　井嶋　克志
正会員　川崎　徳明
学生会員　Z.M.Nizam

1. 研究目的

幾何学的非線形骨組解析に関する既往研究の多くは、Euler 梁要素を用いて解析を行っている。これは、ある程度はりせいが小さくなると、中立軸と断面が直交しているという仮定が成立し、せん断変形を無視できるためである。しかし、はりせいが大きく、せん断変形が曲げ変形に対して無視できないほど大きくなる場合は、せん断変形を考慮した Timoshenko 梁要素を用いて解析を行うのが一般的である。一方で、はりせいが小さい梁の場合でも、Euler 梁に大きな変形を引き起こすような巨大荷重を一括載荷したときには、要素分割が密になるほど不平衡力が収束しにくくなる。そこで本研究では、前述の巨大荷重一括載荷時に Timoshenko 梁要素を用いたモデルにおいて要素分割の粗密と不平衡力収束に関するロバスト性について検討する。

2. 解析手法

接線剛性法による幾何学的非線形解析プログラムを用いる。図-1 に示すように、一要素に対して静定で安定な支点条件を付与したときの独立な要素力と要素変形の間の線形部材力式について、Euler 梁要素、Timoshenko 梁要素のそれぞれを示せば

Euler 梁要素
$$\begin{bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{EA}{L_0} & 0 & 0 \\ 0 & 4\dfrac{EI}{L_0} & 2\dfrac{EI}{L_0} \\ 0 & 2\dfrac{EI}{L_0} & 4\dfrac{EI}{L_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta L_{ij} \\ \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad —(1)$$

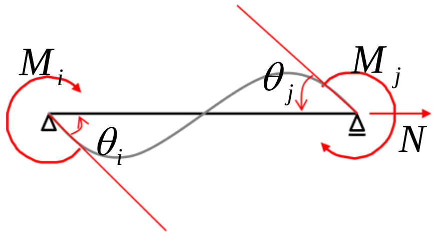

図-1　要素力と要素変形の関係

Timoshenko 梁要素
$$\begin{bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{EA}{L_0} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{EI}{L_0(1+q)}(4+q) & \dfrac{EI}{L_0(1+q)}(2-q) \\ 0 & \dfrac{EI}{L_0(1+q)}(2-q) & \dfrac{EI}{L_0(1+q)}(4+q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta L_{ij} \\ \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad —(2)$$

と表すことができる。ただし、$q = \dfrac{12EI}{GAL_0^2}$ であり、q=0 のとき、両式は一致する。

3. 解析結果及び考察

以下、ヤング率 $E=2.0\times10^{11}\mathrm{N/m^2}$ を用いる。また、不平衡力が $1.0\times10^{-3}\mathrm{N}$ もしくは、$1.0\times10^{-3}\mathrm{Nm}$ より小さくなったときに収束と判定する。

計算例 1：図-2 に示す梁の左端に収束解が図-3 のような二重円を形成する端モーメントを作用させる。梁の長さは L=10m とし、幅 b=0.2m、はりせい h=0.1m の矩形断面とする。

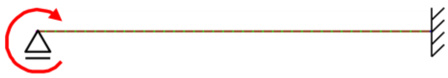
図-2　計算例 1 の初期形状

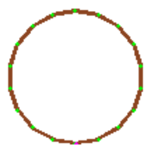
図-3　収束解

図-4 に示すように Euler 梁要素は 78 以上分割を密にすると収束しなかった。それに対し Timoshenko 梁要素は、200 以上分割しても収束解を得ること出来た。また、収束解は図-3 に示すように全節点が厳密に同心円状に配置された完全な真円となり、せん断力、軸力ともにゼロとなる。図-5 はその時の理論解の円の半径$\left(=\dfrac{L}{4\pi}\right)$と数値解の円の半径の比と要素分割数の関係を調べたものである。せん断変形が生じないこのモデルでは両要素の精度は完全に一致し、Euler 梁要素が使用可能な範囲でも十分な精度の解が得られているが、これ以上大きな曲率となった場合や複雑な変形を伴う場合には Timoshenko 梁要素を用いた方が合理的であると考えられる。

計算例 2：図-6 のような梁の左端に、Euler の座屈荷重 P_k よりも若干大きめの圧縮荷重 P を攪乱荷重(モーメント)とともに作用させる。梁の長さは L=10m とし、b=0.2m、h=0.1m の矩形断面である。このとき、Euler の座屈荷重は $P_k=6.714\times10^5$N である。$P=7\times10^5$N を攪乱荷重 9.807×10^3Nm とともに左端に作用させると、分割数の違いにより複数の異なる解が得られるが、図-7 に示す形状は、その中でも最も多く現れた 1 次モードの座屈波形を示す収束解である。得られた収束解の左端を右端の位置まで一気に強制変位させると図-8 のような収束解となった。図-9 に示すように、Euler 梁要素は分割数が 80 までしか収束しなかったが、Timoshenko 梁要素は分割数を 200 まで増やしても収束解を得ることができた。このような、Euler 座屈後にさらに強制変位をかける複雑な変形プロセスをたどるモデルにおいても、Timoshenko 梁要素を用いた方が収束しやすく合理的であるといえる。

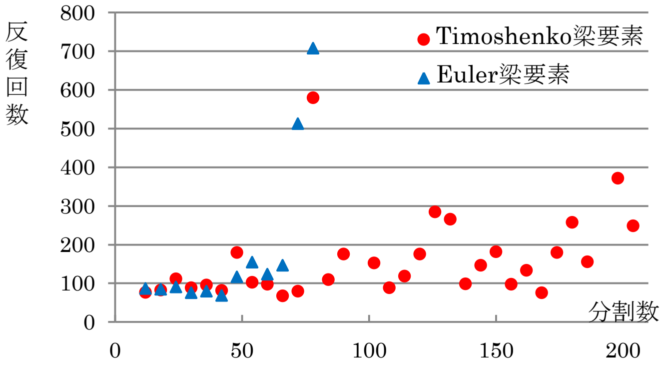

図-4　収束に至る反復計算回数と要素分割の関係

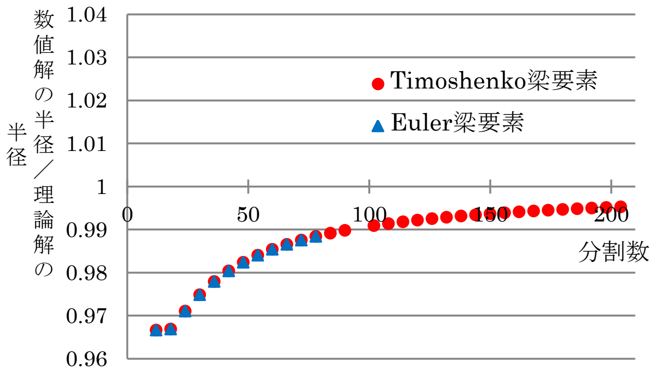

図-5　収束解の精度


図-6　計算例 2 の初期形状

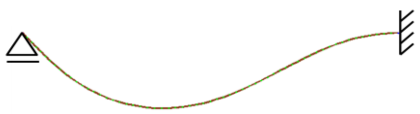
図-7　Euler 座屈直後の解

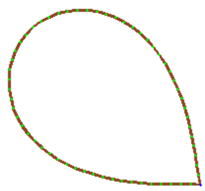
図-8　目的解

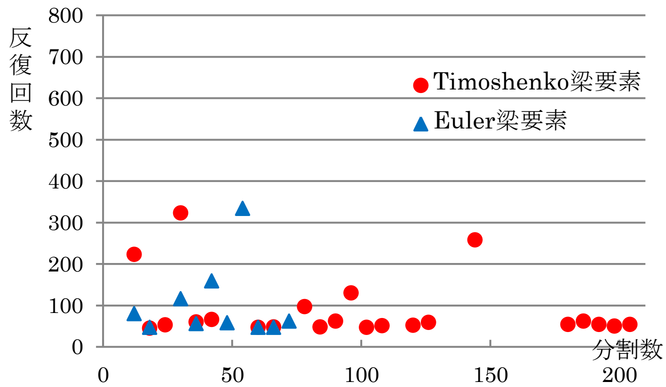

図-9　収束に至る反復計算回数と要素分割の関係

4.　まとめ

ここに示したすべての計算例で、Euler 梁要素より Timoshenko 梁要素で解析を行う方が、概して反復計算回数が少なく、また、発散することなく安定的に収束解を得ることができた。したがって、はりせいの大小にかかわらず、巨大荷重を一括載荷した時のように非常に大きな変位を伴う、負荷の大きな計算の場合でも Timoshenko 梁要素を用いればロバスト性が高い解析が可能となる。