

物体力を受ける弾性基礎にある矩形板の静力学的特性について

大分工業高等専門学校	学生会員	○大川 茉友子
大分工業高等専門学校	正 会 員	名 木 野 晴 暢
豊橋技術科学大学	正 会 員	樋 口 理 宏
豊橋技術科学大学	非 会 員	足 立 忠 晴
大同大学	正 会 員	水 澤 富 作
北海道大学	F 会 員	三 上 隆

1. まえがき

地盤－構造相關問題である弾性基礎にある矩形板の精確な力学的挙動を明らかにすることは、種々の工学分野において重要である。名木野ら^{1), 2)}は、弾性基礎にある矩形板の静力学的特性（変形状態、変位や応力分布特性）に与える板厚、地盤反力係数や面外荷重の影響を三次元弾性論に基づいて明らかにしてきた。これらの検討は、Fourier 解析を用いた理論解析に基づいていた為、支持条件が周面単純支持に限定されている。しかし、現実的には、固定面や自由面を有する矩形板の静力学的特性を明らかにする必要がある。

本論文では、B-spline Ritz 法³⁾を用いて、物体力を受ける弾性基礎にある矩形板の三次元応力解析とひずみエネルギー解析を行い、その静力学的特性に与える板厚や支持条件の影響を明らかにすることを目的としている。

2. 弾性基礎にある矩形板の曲げ問題の定式化

図-1 には、物体力を受ける矩形板と直交座標系が示してある。ここで、三次元弾性論に従う均質・等方な矩形板は微小変形かつ線形弾性であるとし、図中には示していないが、面外方向の物体力を Z で表す。また、弾性基礎は Winkler 基礎でモデル化し、これは板下面で滑らかに完全密着しているものとする。

弾性基礎にある矩形板の曲げ問題の定式化にあたり、次式のような無次元座標系を導入する。

$$\xi = x/a, \eta = y/b, \zeta = z/h \quad (1)$$

無次元変位 $U = u/a, V = v/a, W = w/a$ は、B-spline 関数の三重積で仮定する³⁾。

$\bar{U}$ を矩形板のひずみエネルギー、 $\bar{V}$ を物体力による外力ポテンシャルとすれば、地盤－構造系の汎関数 Π は、 $\Pi = \bar{U} - \bar{V}$ で表される。よって、汎関数 Π を極値化すれば、次式のような代数方程式を得る。

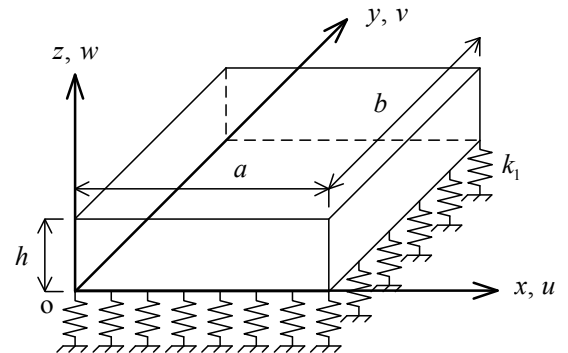


図-1 物体力を受ける矩形板と直交座標系

$$([K_p] + [K_F])\{\Delta\} = \{f\} \quad (2)$$

ただし、 $[K_p]$ は矩形板の剛性マトリックス、 $[K_F]$ は弾性基礎の剛性マトリックス、 $\{f\}$ は外力ベクトルであり、 $\{\Delta\}$ は未定係数ベクトルである。よって、式(2)を解けば、変位、応力やひずみエネルギーが求められる。

3. 数値計算例及び考察

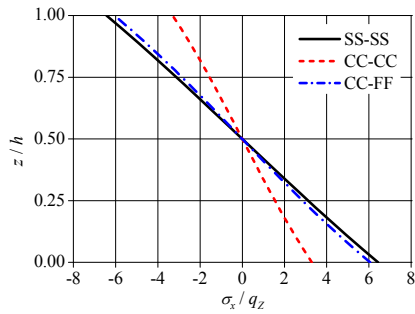
ここでは、物体力を受ける弾性基礎にある矩形板の三次元応力解析とひずみエネルギー解析を行い、矩形板の板厚方向の応力分布とひずみエネルギーに与える板厚比 h/a と支持条件の影響を明らかにする。数値計算では、辺長比 $b/a = 1$ 、ポアソン比 $\nu = 0.2$ 、無次元地盤反力係数 $\Theta \equiv k_1 a / E = 10^{-2}$ を用いた。また、変位、応力及びひずみエネルギーの解析結果は、次式のように無次元化している。

$$w^* = \frac{wE}{q_z a}, \quad \sigma_x^* = \frac{\sigma_x}{q_z}, \quad U_{ij}^* = \frac{U_{ij} E}{q_z^2 a^3} \quad (i, j = x, y, z) \quad (3)$$

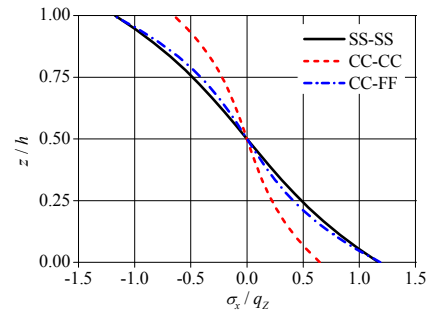
ただし、 E は縦弾性係数、 q_z は単位厚さあたりの物体力の荷重強度であり、各ひずみエネルギー成分 U_{ij} とひずみエネルギー解析の詳細については、文献 2) を参照されたい。なお、ひずみエネルギーは、曲げ変形成分を $U_b = U_{xx}^* + U_{yy}^* + U_{xy}^*$ 、面外せん断変形成分を $U_s = U_{yz}^* + U_{zx}^*$ 、面外伸縮変形成分を $U_z = U_{zz}^*$ で表す。

表-1 弾性基礎にある矩形板の変位，応力とひずみエネルギーの収束性と精度比較： $\Theta = 10^{-2}$

h/a	Methods	$m_\xi \times m_\eta \times m_\zeta$	$w^*(\zeta=0)$	$w^*(\zeta=1)$	$\sigma_x^*(\zeta=0)$	$\sigma_x^*(\zeta=1)$	U_{xx}^*	U_{zx}^*
0.2	Present	$15 \times 15 \times 15$	-5.142	-5.147	6.050	-6.060	0.9260	0.5382
		$21 \times 21 \times 15$	-5.143	-5.148	6.053	-6.063	0.9261	0.5382
		$25 \times 25 \times 15$	-5.143	-5.148	6.053	-6.063	0.9261	0.5382
	FEM (C3D8)	$51 \times 51 \times 11$	-5.124	-5.128	5.736	-5.746	—	—
	FEM (C3D20)	$51 \times 51 \times 11$	-5.139	-5.144	6.057	-6.067	—	—
0.5	Present	$15 \times 15 \times 15$	-0.8987	-0.9008	1.186	-1.190	0.06714	0.2200
		$21 \times 21 \times 15$	-0.8987	-0.9009	1.187	-1.190	0.06715	0.2200
		$25 \times 25 \times 15$	-0.8987	-0.9009	1.187	-1.190	0.06715	0.2200
	FEM (C3D8)	$41 \times 41 \times 21$	-0.8960	-0.8981	1.138	-1.141	—	—
	FEM (C3D20)	$41 \times 41 \times 21$	-0.8983	-0.9005	1.188	-1.191	—	—

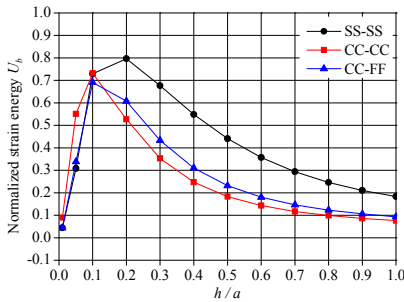


(a) $h/a = 0.2$

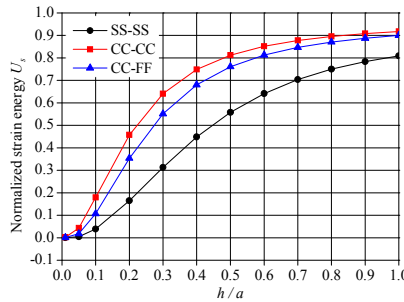


(b) $h/a = 0.5$

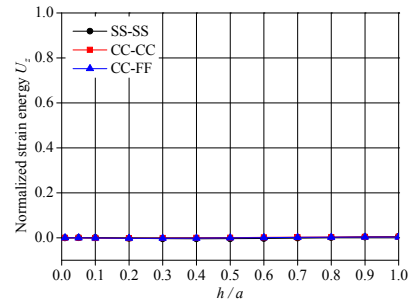
図-2 弾性基礎にある矩形板の板厚方向の応力分布に与える板厚比と支持条件の影響： $\Theta = 10^{-2}$



(a) 曲げ変形成分 U_b



(b) 面外せん断変形成分 U_s



(c) 面外伸縮変形成分 U_z

図-3 弾性基礎にある矩形板のひずみエネルギー成分に与える板厚比と支持条件の影響： $\Theta = 10^{-2}$

表-1 には，弾性基礎にある矩形板の中央点 ($\xi = \eta = 0.5$) での w^* , σ_x^* 及び U_{xx}^* , U_{zx}^* の収束性と精度比較が示してある．ここで，支持条件は相対する二面が固定及び自由 (CC-FF) とした．また，解の精度比較のために，汎用有限要素コード ABAQUS 6.11 による数値解も示してある．これより， h/a の値に係わらず，B-spline Ritz 法により求めた w^* , σ_x^* 及び U_{xx}^* , U_{zx}^* の収束状態は良好であり，また，有限要素解との比較から，B-spline Ritz 法の妥当性が確認できる．

図-2 と図-3 には，物体力を受ける弾性基礎にある矩形板の中央点での板厚方向の応力分布とひずみエネルギー成分に与える板厚比と支持条件の影響が示してある．ここで，SS-SS は周面単純支持，CC-CC は周面固定を意味する．図-2 より，支持条件に係わらず， h/a

a が大きくなると，応力分布は中央面に関してほぼ逆対称な曲線分布になる．これは面外せん断変形の影響によるものであることが図-3 からわかる．また，拘束が大きいほど面外せん断変形の影響が現れ易くなる．

4. まとめ

本論文では，物体力を受ける弾性基礎にある矩形板の静力学的特性に与える板厚や支持条件の影響の一部を明らかにした．

参考文献

- 1) 名木野ら：応用力学論文集, Vol.12, pp.43-54, 2009.
- 2) 名木野ら：構造工学論文集, Vol.57A, pp.27-40, 2011.
- 3) Nagino et al.: J. Sound Vib., pp.329-353, 2008.