

ひずみエネルギーと運動エネルギーに着目した 任意の支持条件を有する矩形板の自由振動特性の評価について

大分工業高等専門学校	学生会員	○清 成 康 平
大分工業高等専門学校	正 会 員	名 木 野 晴 暢
大同大学	正 会 員	水 澤 富 作
北海道大学	F 会 員	三 上 隆

1. まえがき

矩形板は、種々の工学分野で用いられる基本的な構造要素の一つであり、その静力学的特性及び動力学的特性を把握することは重要である。

名木野ら¹⁾は、面外荷重を受ける矩形板の静力学的特性の評価方法として、従来の局所的な変位や応力分布による評価ではなく、全体的かつ平均的なひずみエネルギーに着目した評価を試み、面外荷重を受ける矩形板の変形状態における曲げ変形、面外せん断変形及び面外伸縮変形の影響を明らかにしている。

本論文では、矩形板の動的問題における文献 1) の評価方法の適用性を明らかにすることを目的とし、ひずみエネルギーと運動エネルギーに着目して、矩形板の自由振動特性の評価に関する基礎的な検討を行った。

2. ひずみエネルギーと運動エネルギーによる矩形板の自由振動特性の評価方法

ここでは、ひずみエネルギーと運動エネルギーを用いた矩形板の自由振動特性の評価方法について述べる。

図-1 には、矩形板と直交座標系、変位方向の定義が示してある。ここで、三次元弾性論に従う等質・等方な矩形板は微小変形かつ線形弾性であるとする。なお、 a は板の長さ、 b は幅、 h は厚さ、 u, v, w は、それぞれ、 x, y, z 方向の時間依存性の変位成分であり、 u, v は面内変位、 w は面外変位である。

矩形板の最大ひずみエネルギー $U_{\max}$ と最大運動エネルギー $T_{\max}$ は、次式で与えられる。

$$U_{\max} = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} + U_{xy} + U_{yz} + U_{zx} \quad (1)$$

$$T_{\max} = T_{UU} + T_{VV} + T_{WW} \quad (2)$$

ただし、

$$U_{ii} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^h \sigma_i \varepsilon_i dz dy dx \quad (i = x, y, z),$$

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^h \tau_{ij} \gamma_{ij} dz dy dx \quad (i, j = x, y, z; i \neq j) \quad (3)$$

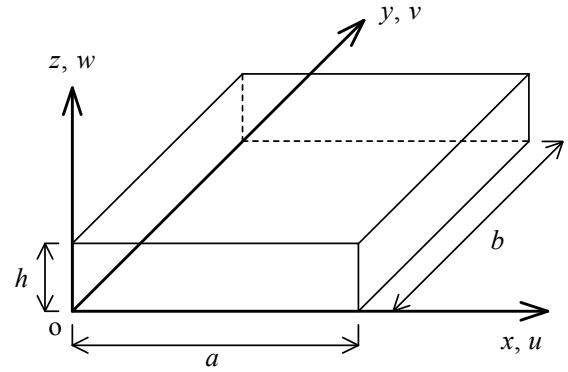


図-1 矩形板と直交座標系、変位方向の定義

$$T_{UU} = \frac{\rho \omega^2}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^h U^2 dz dy dx,$$

$$T_{VV} = \frac{\rho \omega^2}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^h V^2 dz dy dx,$$

$$T_{WW} = \frac{\rho \omega^2}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^h W^2 dz dy dx \quad (4)$$

であり、 U, V, W は振幅変位、 ρ は矩形板の密度、 ω は円振動数、 $i^2 = -1$ は虚数単位である。従って、曲げ振動を対象とすれば、 U_{xx}, U_{yy}, U_{xy} は曲げ変形成分、 U_{zz} は面外伸縮変形成分、 U_{yz}, U_{zx} は面外せん断変形成分に関するひずみエネルギーを意味し、 T_{UU}, T_{VV} は面内変位成分、 T_{WW} は面外変位成分に関する運動エネルギーを意味する。よって、これらのエネルギーの値を比較したり、値の変化を調べたりすることで、矩形板の自由振動の状態やその特性を定量的に評価することができる。なお、各エネルギー成分の計算には Gauss-Legendre の数値積分を用い、固有値(円振動数)とこれに対応する固有ベクトルの計算には B-spline Ritz 法²⁾を用いた。その詳細については、文献 2) を参照されたい。

3. 数値計算例及び考察

ここでは、矩形板の基本曲げ振動を対象として、矩形板の各ひずみエネルギー成分の値及び各運動エネルギー成分の値に与える板厚比 h/a や支持条件の影響

表-1 相対する二面が固定，他の二面が自由である矩形板の基本振動数とエネルギー成分の収束性と精度比較

h/a	Methods	$m_{\xi} \times m_{\eta} \times m_{\zeta}$	Ω_{1st}	U_{xx}	U_{yy}	U_{zx}	T_{ww}
0.2	Present	$15 \times 15 \times 15$	1.074	3.288×10^{-1}	-3.315×10^{-3}	1.746×10^{-1}	4.258×10^{-1}
		$17 \times 17 \times 15$	1.074	3.288×10^{-1}	-3.315×10^{-3}	1.746×10^{-1}	4.259×10^{-1}
		$19 \times 19 \times 15$	1.074	3.289×10^{-1}	-3.315×10^{-3}	1.746×10^{-1}	4.259×10^{-1}
	FEM (C3D8)	$41 \times 41 \times 9$	1.077	—	—	—	—
	FEM (C3D20)	$41 \times 41 \times 9$	1.075	—	—	—	—
0.5	Present	$15 \times 15 \times 15$	1.600	1.274×10^{-1}	-1.425×10^{-3}	3.743×10^{-1}	1.923×10^{-1}
		$17 \times 17 \times 15$	1.600	1.274×10^{-1}	-1.424×10^{-3}	3.743×10^{-1}	1.923×10^{-1}
		$19 \times 19 \times 15$	1.600	1.274×10^{-1}	-1.424×10^{-3}	3.743×10^{-1}	1.923×10^{-1}
	FEM (C3D8)	$33 \times 33 \times 17$	1.604	—	—	—	—
	FEM (C3D20)	$33 \times 33 \times 17$	1.601	—	—	—	—

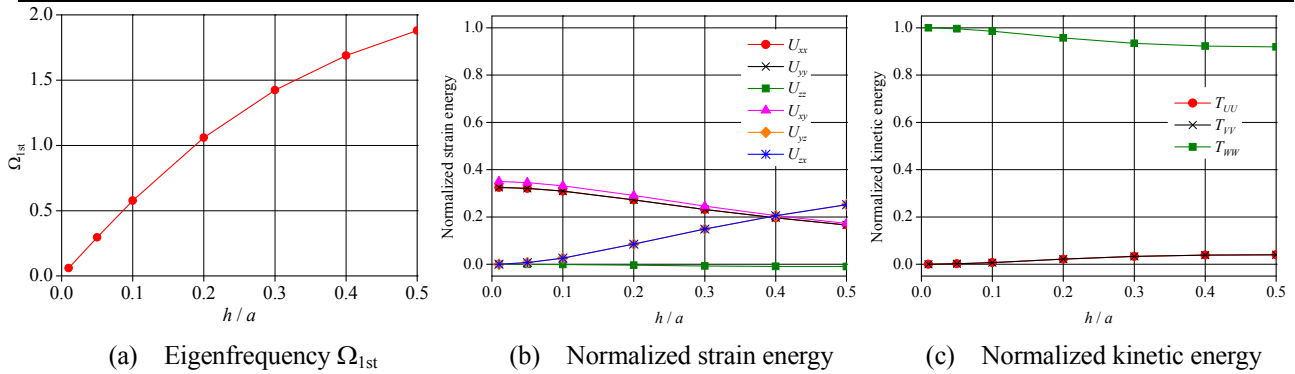


図-2 周面単純支持された矩形板の振動数パラメータ Ω_{1st} と各エネルギー成分に与える板厚比の影響

を整理し，ひずみエネルギーと運動エネルギーに着目した矩形板の自由振動特性の評価を試みる．数値計算では，辺長比 $b/a = 1$ ，ポアソン比 $\nu = 0.3$ を用い，区分点は不等間隔配置²⁾とした．

表-1 には，相対する二面が固定，他の二面が自由である矩形板の基本振動数 $\Omega_{1st} = \omega_{1st} a (\rho/E)^{1/2}$ とエネルギー成分の収束性と精度比較が示してある．ここで，板厚比 h/a は 0.2 と 0.5 に設定した．これより，B-spline Ritz 法による Ω_{1st} の収束状態は良好であり，有効数字四桁での収束値を得ている．また，この値は，汎用有限要素コード Abaqus 6.11 による数値解とも良く一致している．さらに，ひずみエネルギー成分 U_{xx} , U_{yy} , U_{zx} と運動エネルギー T_{ww} の収束性も良好で，かつこれらは， $U_{max} = T_{max}$ の関係を満足している．以上のことから，B-spline Ritz 法により求めた固有振動数，固有振動モードや各エネルギー成分の妥当性が確認できる．

図-2 には，周面単純支持された矩形板の基本曲げ振動の振動数 Ω_{1st} ，各ひずみエネルギー成分と各運動エネルギー成分に与える板厚比 h/a の影響が示してある．ここで，各ひずみエネルギー成分と各運動エネルギー成分の値は，それぞれ，最大ひずみエネルギー U_{max} と最大運動エネルギー T_{max} で正規化してある．図-2 の(a)より， h/a の増大に伴い，矩形板の Ω_{1st} の値は増加

する．ここで，図-2 の(b)に着目してみると，曲げ変形成分である $U_{xx} = U_{yy}$ と U_{xy} は， h/a の増大に伴い，その値が減少するのに対して，面外せん断変形成分である $U_{yz} = U_{zx}$ の値は増加する．また，図-2 の(c)より， h/a の増大に伴い，面外変位成分のエネルギー T_{ww} は減少するが，面内変位成分のエネルギー $T_{UU} = T_{VV}$ の値は増加する．以上より， h/a の増大に伴う，周面単純支持された矩形板の Ω_{1st} の増加の原因は，面外せん断変形と面内慣性の影響である．また，エネルギーの値を比較することで，例えば， $h/a = 0.3$ の時，曲げ変形：面外せん断変形：面外伸縮変形 = 0.71 : 0.30 : -0.01 や面内変位：面外変位 = 0.07 : 0.93 のように自由振動における変形状態の割合の定量的な評価も可能である．

4. まとめ

本論文では，ひずみエネルギーと運動エネルギーに着目した矩形板の自由振動特性の評価に関する基礎的な検討を行った．その結果，本方法は，矩形板の自由振動特性の評価に有益であることがわかった．

参考文献

- 1) 名木野ら：構造工学論文集，Vol.57A，pp.27-40，2011．
- 2) Nagino et al.: J. Sound Vib., pp.329-353，2008．