

確率・統計を援用した不飽和土質力学について (その2: 粒子数・接点数)

鹿児島大学工学部 学生会員 小田川隼祐

鹿児島大学大学院理工学研究科 正会員 ○山田 満秀

鹿児島大学大学院理工学研究科 正会員 北村 良介

1. まえがき

土粒子の形状・大きさは不規則であり、土粒子で構成される土塊の土粒子骨格構造・間隙構造は複雑である。北村らは、土粒子の形状・大きさの不規則性を考慮し、確率・統計を援用した不飽和土質力学（北村モデル）の体系化を試みている^{1), 2)}。北村モデルは、社会科学や土木計画学の各種問題に適用され、その有用性が明らかになっている推測統計学的手法（ランダムに抽出された標本から母集団の性質を同定する手法）を土塊に適用し、不飽和土質力学を確立しようとするものである。

本稿では、単位体積当たりの粒子数・接点数、単位面積当たりの接点数、1粒子当たりの接点数について考察を加える。

2. 単位体積当たりの粒子数・接点数、単位面積当たりの接点数、1粒子当たりの接点数

図-1 (a) は一辺が単位長さ（例えば、1cm）の立方体とそこに含まれる土粒子、図-1 (b) は立方体のある断面での粒子接点、そして、図-1 (c) は1粒子が周囲の粒子と接点を形成しているイメージ図を示している。

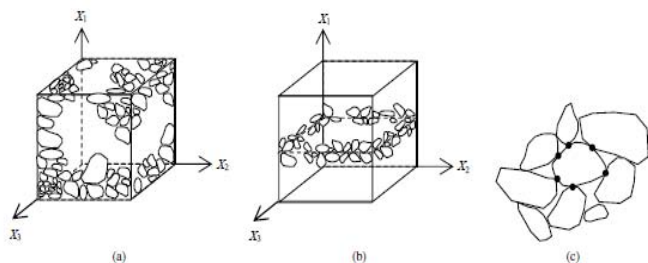


図-1 単位の立方体に含まれる土粒子のイメージ図

2.1 単位体積当たりの粒子数

図-2 は粒度試験により得られる粒径加積曲線の模式図を示している。

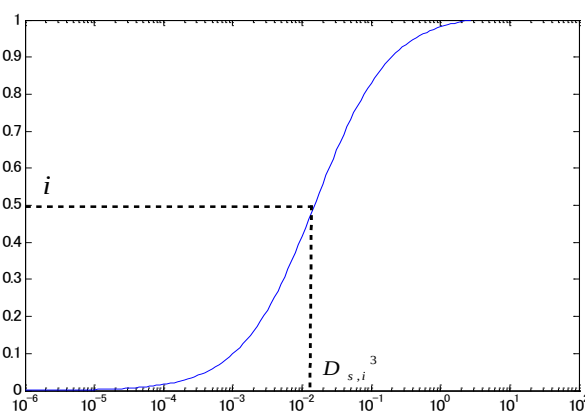


図-2 粒径加積曲線

通過質量百分率である縦軸を n 個（例えば、 $n=100$ ）に分割した i 番目の質量を m_i とすると次式が成り立つ。

$$M_s = \sum_{i=1}^n m_i \quad (1)$$

ここに、 M_s : 図-1 (a) の立方体に含まれる土粒子の質量の総和。

M_s は間隙比 e と次式の関係がある。

$$M_s = \frac{1}{1+e} \rho_s \quad (2)$$

ここに、 ρ_s : 土粒子密度

粒径加積曲線から求められる i 番目の質量 m_i に対応する粒径 $D_{s,i}$ の粒子数を N_i とすると次式が成り立つ。

$$m_i = N_i \cdot \frac{D_{s,i}^3}{6} \pi \cdot \rho_s \quad (3)$$

また、 m_i は粒径に関する確率密度関数 $Ps(Ds)$ を用いる

と次式のようになる。

$$m_i = M_s \cdot P_s(D_{s,i}) \cdot dD_s \quad (4)$$

式 (3)、式 (4) より、次式が導かれる。

$$N_i \cdot \frac{D_{s,i}^3}{6} \pi \cdot \rho_s = M_s \cdot P_s(D_{s,i}) \cdot dD_s \quad (5)$$

式 (5) に式 (2) を代入すると、次式のようになる。

$$N_i \cdot \frac{D_{s,i}^3}{6} \pi = \frac{1}{1+e} P_s(D_{s,i}) \cdot dD_s \quad (6)$$

式 (6) より、 N_i は次式のように求められる。

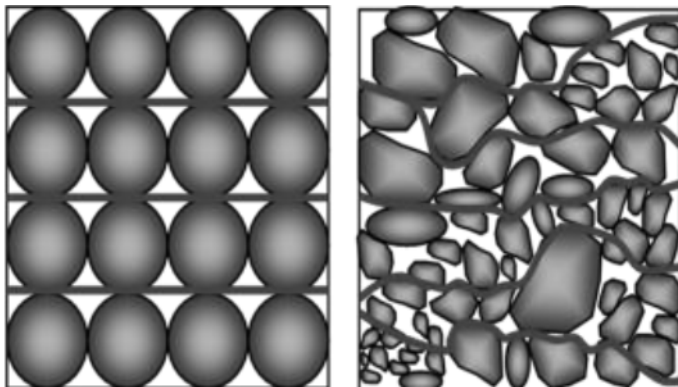
$$N_i = \frac{1}{1+e} \cdot \frac{6}{D_{s,i}^3 \cdot \pi} \cdot P_s(D_{s,i}) \cdot dD_s \quad (7)$$

図-1 (a) に示した立方体に含まれる粒子数を N とすると、 N_i とは次式のような関係が成り立つ。

$$N = \sum_{i=1}^n N_i = \frac{1}{1+e} \sum_{i=1}^n \frac{6}{D_{s,i}^3 \cdot \pi} \cdot P_s(D_{s,i}) \cdot dD_s \quad (8)$$

式 (8) の右辺の間隙比 e 、確率密度関数 $P_s(D_s)$ は既知であり、式 (8) を用いて立方体に含まれる粒子数 N が既知となる。

2.2 単位体積当たり・単位面積当たり・1粒子当たりの接点数



(a) 一様球の simple cubic packing (b) 形状・大きさがランダムな粒子

図-3 代表粒径と層数の関係を示した概念図

1粒子当たりの接点数はField³⁾が提案した次式に示す経験式を用いることにする。

$$C_a = \frac{12}{1+e} \quad (9)$$

単位体積当たりの接点数 N_{cv} は次式のようになる。

$$N_{cv} = \frac{C_a}{2} \cdot N \quad (10)$$

単位体積当たりの接点数 N_{cv} と単位面積当たりの接点

数 N_{ca} を関係づけるためには代表粒径 D_{rep} の概念が必要である。図-3 は代表粒径を考えるために用いられる。すなわち、図-3 (a) は一様球の simple packing を示しており、この場合の代表粒径 D_{rep} は一様球の直径(粒径)となる。この場合の一边が単位長さ(例えば、1 cm)立方体の層数 N_l は次式で求められる。

$$N_l = \frac{1}{D_{rep}} \quad (11)$$

式 (10)、式 (11) を用いると、単位体積当たり接点数 N_{cv} と単位面積当たりの接点数 N_{ca} は次式のように関係づけられる。

$$N_{ca} = \frac{N_{cv}}{N_l} = \frac{C_a}{2} \cdot N \cdot D_{rep} \quad (12)$$

図-3 (b) は、一般の土の状態を示しており、一様球の場合のように代表粒径を直接的に求めることが困難である。現時点では基本粒状体モデルの高さである D_h (間隙径分布の平均) を用いている¹⁾ が、今後の検討が必要である。

3. あとがき

本稿では、単位体積当たりの粒子数・接点数、単位面積当たりの接点数、1粒子当たりの接点数の導出について議論した。代表粒径は単位体積当たりの接点数と単位面積当たりの接点数を関係づける重要な物理量であり、これらは連続体力学での表面力(応力)と物体力との関係に対応していると考えられる。代表粒径の決定方法については、今後の理論的・実験的研究が必要である。

参考文献

- 1) 北村良介・酒匂一成・荒木功平・宮本裕二：確率・統計を援用した不飽和土質力学の体系化、土木学会論文集 C、Vol.66, No.3, pp.498-515, 2010.
- 2) 小田川隼祐・山田満秀・北村良介：確率・統計を援用した不飽和土質力学について(その1：基本物理量の導出)、平成22年度土木学会西部支部研究発表会、2011(投稿中)。
- 3) Field, W. G.: Towards the statistical definition of a granular mass, Proc. 4th A and N.Z. Conf. on SMFE, pp.143-148, 1963