

確率・統計を援用した不飽和土質力学について (その1: 基本物理量の導出)

鹿児島大学工学部 学生会員 ○小田川隼祐
 鹿児島大学大学院理工学研究科 正会員 山田 満秀
 鹿児島大学大学院理工学研究科 正会員 北村 良介

1. まえがき

土粒子の形状・大きさは不規則であり、土粒子で構成される土塊の土粒子骨格構造・間隙構造は複雑である。北村らは、土粒子の形状・大きさの不規則性を考慮し、確率・統計を援用した不飽和土質力学 (北村モデル) の体系化を試みている¹⁾。北村モデルは、社会科学や土木計画学の各種問題に適用され、その有用性が明らかになっている推測統計学的手法 (ランダムに抽出された標本から母集団の性質を同定する手法) を土塊に適用し、不飽和土質力学を確立しようとするものである。本稿では、確率密度関数を用いて土の状態を規定する物理量である間隙比と飽和度を導出している。

2. 土塊 (母集団) と基本粒状体 (標本)・基本粒状体モデル

北村モデルで対象としている土は砂質土であり、豊浦砂 (50%通過粒径 $D_{50}=0.2\text{mm}$ 程度) やしらすをイメージしている。図1は、砂質土塊 (母集団) から取り出された数個の土粒子 (標本) をモデル化したものである。すなわち、間隙部分は直径 D_v 、傾き θ のパイプ、土粒子実質部分はその他の不透水部分となるようモデル化している。以下では、上で述べた土粒子の標本を基本粒状体、これをモデル化した図1の直方体を基本粒状体モデルと称している。砂質土塊を母集団、基本粒状体・基本粒状体モデルを標本と見なし、確率・統計の手法を援用すると、基本粒状体モデルに示されるパイプの直径 D_v とパイプの傾き θ は独立な確率変数となる。

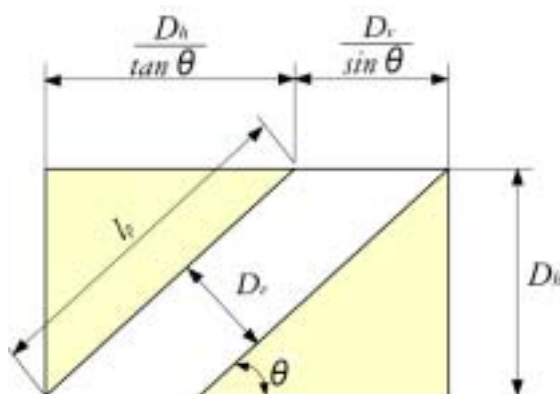


図-1 数個の土粒子 (標本) のモデル化

3. 土塊 (母集団) と基本粒状体 (標本) の関係

本章では間隙比に焦点をあて、土塊 (母集団) と基本粒状体 (標本) の関係を明らかにする。

図-2は土質力学の基本である相構成図を示しており、土塊 (母集団) の間隙比 e は次式で定義される。

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (1)$$

母集団の間隙 V_v と土粒子実質部分 V_s の体積は基本粒状体 (標本) の全集合となる。全標本数を n 、基本粒状体の i 番目の間隙の体積を $V_{v,e,i}$ 、土粒子実質部分の体積を $V_{s,e,i}$ とすると、式 (1) は次式のようにになる。

$$e = \frac{V_v}{V_s} = \frac{\sum_{i=1}^n V_{v,e,i}}{\sum_{i=1}^n V_{s,e,i}} \quad (2)$$

右辺の分母を n で割ると次のようになる。

$$e = \frac{V_v}{V_s} = \frac{\sum_{i=1}^n V_{v,e,i}}{\sum_{i=1}^n V_{s,e,i}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_{v,e,i}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_{s,e,i}} = \frac{E[V_{v,e}]}{E[V_{s,e}]} \quad (3)$$

ここに、 $E[V_{v,e}]$: 基本粒状体の間隙部分の平均体積、

$E[V_{s,e}]$: 基本粒状体の土粒子実質部分の平均体積。

4. 基本粒状体 (標本) と基本粒状体モデルの関係

図-3 は、基本粒状体をパイプの直径が D_v 、傾きが θ の基本粒状体モデルによってモデル化したときの幾何学的関係を示している。図-3 より基本粒状体モデルの体積 V_e とパイプの体積 V_p は次のように求められる。

$$V_e = D_v \cdot \left(\frac{D_v}{\sin \theta} + \frac{D_h}{\tan \theta} \right) \cdot D_h \quad (4)$$

$$V_p = \pi \cdot \left(\frac{D_v}{2} \right)^2 \cdot \frac{D_h}{\sin \theta} \quad (5)$$

基本粒状体の間隙部分・土粒子実質部分の体積 $V_{v,e,i}$ 、 $V_{v,s,i}$ と基本粒状体モデルの体積 V_e とパイプの体積 V_p とは次式のような関係となる。

$$V_{v,e,i} = V_p = \pi \cdot \left(\frac{D_v}{2} \right)^2 \cdot \frac{D_h}{\sin \theta} \quad (6)$$

$$V_{s,e,i} = V_e - V_p = D_v \cdot \left(\frac{D_v}{\sin \theta} + \frac{D_h}{\tan \theta} \right) \cdot D_h - \pi \cdot \left(\frac{D_v}{2} \right)^2 \cdot \frac{D_h}{\sin \theta}$$

(7)

5. 基本粒状体の間隙部分・土粒子実質部分 (標本) の平均体積

前述のように基本粒状体モデルに示されるパイプの直径 D_v とパイプの傾き θ は独立な確率変数であり、それぞれの確率分布を規定する確率密度関数 $P_v(D_v)$ 、 $P_c(\theta)$ を導入することができる。パイプの直径 D_v の確率密度関数 $P_v(D_v)$ は粒径加積曲線から求められ (対数正規分布) パイプの傾きの確率密度関数 $P_c(\theta)$ は接点角分布 (五角形分布) と等しいとしている¹⁾。これらの確率密度関数を用いると、基本粒状体の間隙部分と土粒子実質部分の平均体積 $E[V_{v,e}]$ と $E[V_{s,e}]$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} E[V_{v,e}] &= \int_0^\infty \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V_{v,e,i} P_v(D_v) P_c(\theta) d\theta dD_v \\ &= \int_0^\infty \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi \cdot \left(\frac{D_v}{2} \right)^2 \cdot \frac{D_h}{\sin \theta} P_v(D_v) P_c(\theta) d\theta dD_v \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[V_{s,e}] &= \int_0^\infty \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V_{s,e,i} P_v(D_v) P_c(\theta) d\theta dD_v \\ &= \int_0^\infty \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ D_v \cdot \left(\frac{D_v}{\sin \theta} + \frac{D_h}{\tan \theta} \right) \cdot D_h - \pi \cdot \left(\frac{D_v}{2} \right)^2 \cdot \frac{D_h}{\sin \theta} \right\} P_v(D_v) P_c(\theta) d\theta dD_v \end{aligned}$$

(9)

式 (8) 式 (9) を式 (3) に代入すると、間隙比 e は次式のように求められる。

$$e = \frac{V_v}{V_s} = \frac{\int_0^\infty \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi \cdot \left(\frac{D_v}{2} \right)^2 \cdot \frac{D_h}{\sin \theta} P_v(D_v) P_c(\theta) d\theta dD_v}{\int_0^\infty \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ D_v \cdot \left(\frac{D_v}{\sin \theta} + \frac{D_h}{\tan \theta} \right) \cdot D_h - \pi \cdot \left(\frac{D_v}{2} \right)^2 \cdot \frac{D_h}{\sin \theta} \right\} P_v(D_v) P_c(\theta) d\theta dD_v} \quad (10)$$

図-2 の相構成図を用いると、飽和度 S_r は次式のように定義される。

$$S_r = \frac{V_w}{V_v} \quad (11)$$

間隙比 e の導出と同様な手法を適用すると、飽和度は次式のようになる。

$$S_r = \frac{V_w}{V_v} = \frac{E[V_{w,e}]}{E[V_{v,e}]} = \frac{\int_0^d \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi \cdot \left(\frac{D_v}{2} \right)^2 \cdot \frac{D_h}{\sin \theta} P_v(D_v) P_c(\theta) d\theta dD_v}{\int_0^\infty \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi \cdot \left(\frac{D_v}{2} \right)^2 \cdot \frac{D_h}{\sin \theta} P_v(D_v) P_c(\theta) d\theta dD_v}$$

上式右辺の分子の積分範囲が $0 \sim d$ となっていることは、基本粒状体モデルのパイプの直径が $0 \sim d$ には間隙水が満たされていること、相構成図の間隙水と間隙空気の境界が基本粒状体モデルのパイプの直径の具体値 d に対応していることを意味している。

6. あとがき

本稿では、推測統計学の手法 (ランダムに抽出された標本から母集団の性質を同定する手法) を土塊 (母集団) と基本粒状体 (標本) に適用し、基本粒状体モデルのパイプの直径と傾きを確率変数とみなし、それらの確率密度関数を導入することによって、間隙比と飽和度を導出した。同様にして間隙率、含水比、体積含水率などの土の状態を規定する物理量が基本粒状体モデルのパイプの直径と傾きの確率密度関数を用いることによって導出することができる。これらのことについては、発表当日に示す。

参考文献

1) 北村良介・酒匂一成・荒木功平・宮本裕二: 確率・統計を援用した不飽和土質力学の体系化、土木学会論文集 C、Vol.66, No.3, pp.498-515, 2010.