

サブスペース近似による大規模動的有限要素解析の効率化

九州大学 学生会員 ○飯田 浩貴
九州大学大学院 学生会員 Norliyati M.Amin
九州大学大学院 正会員 浅井 光輝
九州大学大学院 正会員 園田 佳巨

1. 序論

数値解析により構造物の挙動を正確に把握するためには、対象とする構造物の細かな部位までを適切にモデル化し、同時に構造全体の挙動を解析することが望ましい。しかしながら、対象構造物を有限要素法で詳細に要素分割すればするだけ、必然的に解析に時間を要してしまう。そのため、通常の構造解析では、梁・トラス要素などによりモデルの簡約化を行うことで、計算の効率を向上させている。簡易モデルによる解析では構造物全体の変位応答は高い精度で表現できるが、詳細な機構の影響までを評価するには不適切であり、また任意点での応力分布を評価することは困難である。

本研究では、形状の簡易モデル化を行わず、解析領域全体を詳細に要素分割した有限要素モデルを解析対象とし、ある種のモード分解法による高速振動解析法を適用することで、解析に要する計算時間の短縮を目指した。本稿ではそれらの方法の概要と具体的な解析例を報告する。

2. Krylov 部分空間によるモデル縮約化法

数学分野で研究が盛んに行われている Krylov 部分空間によるモデル縮約化法（以下、KS-MOR と略）の FEM への適用について概説する。

2-1. 動的 FEM による離散化方程式

線形弾性体の動的問題を通常の FEM により空間離散化し、以下に示す方程式が得られたとする。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \alpha(t)\mathbf{f}$$

ここで、 \mathbf{M} : 質量行列、 \mathbf{D} : 減衰行列、 \mathbf{K} : 剛性行列である。また、 $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 、 $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 、 $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ であり、変位 \mathbf{u} の自由度は N とする。減衰行列はレイリー型減衰を用い、

$$\mathbf{D} = \alpha_R \mathbf{M} + \beta_R \mathbf{K}$$

として与える。

2-2. Krylov 部分空間による縮約

行列 $\mathbf{A} = \mathbf{D}\mathbf{K}^{-1}$ 、 $\mathbf{B} = \mathbf{M}\mathbf{K}^{-1}$ とベクトル $\mathbf{r}_0 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} / \|\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}\|$ 、 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{A}\mathbf{r}_0$ 、 $\mathbf{r}_i = \mathbf{A}\mathbf{r}_{i-1} + \mathbf{B}\mathbf{r}_{i-2}$ より定義される 2 次オーダの

krylov 部分空間を次式により記述する。

$$g_n(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{r}_0) = \text{span} \{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{n-1}\}$$

この部分空間は、2 次 Lanzoz 法、あるいは 2 次 Arnoldi 法などにより求められる n 本の直交基底ベクトル \mathbf{q}_i が形成する部分空間と一致する。

$$g_n(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{r}_0) = \text{span} \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n\} \quad (4)$$

本研究では文献¹⁾に従い、2 次 Arnoldi 法 (SOAR) により直交基底を求めることにした。なお、複数の荷重載荷時、あるいは強制変位問題では、Block 型 SOAR を用いる必要がある。

Algorithm 1: SOAR procedure

1. $\mathbf{q}_1 = \mathbf{r}_0 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} / \|\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}\|$
2. $\mathbf{p}_1 = 0$
3. for $j = 1, 2, \dots, n$ do
4. $\mathbf{r} = \mathbf{D}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{q}_j + \mathbf{M}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}_j$
5. $\mathbf{s} = \mathbf{q}_j$
6. for $i = 1, 2, \dots, j$ do
7. $t_{ij} = \mathbf{q}_i^T \mathbf{r}$
8. $\mathbf{r} := \mathbf{r} - \mathbf{q}_i t_{ij}$
9. $\mathbf{s} := \mathbf{s} - \mathbf{p}_j t_{ij}$
10. end for
11. $t_{j+1j} = \|\mathbf{r}\|$
12. if $t_{j+1j} = 0$, breakdown
13. else
14. $\mathbf{q}_{j+1} = \mathbf{r} / t_{j+1j}$
15. $\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{s} / t_{j+1j}$
16. end if
17. end for

規定する n 本の直交基底のみを使い座標変換を行えば、離散化方程式は以下に示す小規模な方程式へと変換できる。

$$\mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{u}}_n(t) + \mathbf{D}_n \dot{\mathbf{u}}_n(t) + \mathbf{K}_n \mathbf{u}_n(t) = \alpha(t)\mathbf{f}_n$$

ここで、 \mathbf{M}_n 、 \mathbf{D}_n 、 \mathbf{K}_n は $n \times n$ の小行列であり、 \mathbf{f}_n は小ベクトルである。 $\mathbf{M}_n = \mathbf{Q}_n^T \mathbf{M} \mathbf{Q}_n$ 、 $\mathbf{D}_n = \mathbf{Q}_n^T \mathbf{D} \mathbf{Q}_n$ 、 $\mathbf{K}_n = \mathbf{Q}_n^T \mathbf{K} \mathbf{Q}_n$ 、 $\mathbf{f}_n = \mathbf{Q}_n^T \mathbf{f}$ で与えられ、 \mathbf{Q}_n^T は Algorithm 1 より求められる n 本の直交基底ベクトルを保存した $N \times n$ の行列である。

2-3. 反復ソルバーの効率化

KS-MOR のプロセスでは、Algorithm 1 の 4 行目の BSOAR による基底ベクトルの計算に時間を費やす。そこで、この演算に反復ソルバー（前処理付き共役

勾配法)を適用することで省メモリ化, および計算の効率化を図った.

FEM コードにおいて省メモリ化を追求する場合, 通常は EBE 法 (Element-By-Element 法) のように全体剛性行列を記憶しない手法が選択される. しかし, 共有メモリ型並列計算においては, メモリへの同時アクセスによるデータレース(変数の更新もれ)の恐れがあり, 良好な計算効率化は期待できない.

そこで本研究では, NBN 法 (node by node 法) により行列を記憶させることにした. NBN 法とは, 行列・ベクトル積で必要となる非ゼロ成分とその位置関係を記憶させる方法である. この対応関係を記憶させれば, 行列の非ゼロ成分のみを左に寄せるような状態で行列を記憶しても, 行列・ベクトル積を求めることが可能である.

NBN 法により係数行列を記憶すれば, それらの行列が正方行列であった場合との差の分だけ, メモリ使用量と演算量を節約することができる.

3. 解析例

橋梁モデルを解析例とし, 図には構造物の詳細を示す. 橋脚および橋台要素の下面を強制変位節点とし, 強軸直角方向へ同一な強制変位(周期 0.1s, 振幅 1m)を与えた.

図 - 3 は, 桁中央上部での強軸直角方向変位を示す. また, FEM の結果と基底 20 本による KS-MOR による結果の比較も示す. モデルは約 39 万要素, 総自由度数は約 140 万であるが, わずか 20 自由度にも関わらず高精度な近似ができています. また, 図 - 4 には応力分布の推移を示しているが, 図 - 3 に示した特定点の変位だけでなく, 全体の応力分布まで的確に近似できている. 必要とする基底数は, 構造の形状, あるいは精度を期待したい周波数帯にも依存するため特定は困難であるが, 地震時挙動を想定した構造解析であれば 100 程度で十分である.

次に, 計算効率について述べる. 橋梁の例題 (3000 時間ステップの解析) では, 通常の FEM 解析によれば 2, 3 週間程度を要したのに対し, KS-MOR では 2 日程度で解析が終了した.

4. 結論

本報告では, Krylov 部分空間における KS-MOR に着目し, 大規模な FEM 解析の効率化について検証した. まだ, 縮約自由度数の自動決定方法などに課題は残すものの, 精度・効率ともに十分な性能を有する方法として期待できることを確認した.

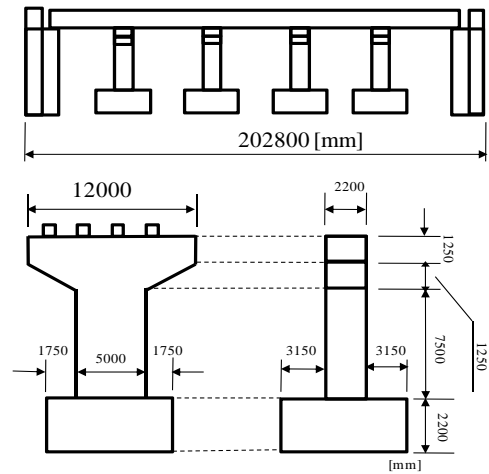


図 - 1. 橋梁全体モデルの概略図

鋼板 5 × 4mm
ゴム 6 × 25mm
合計 170mm

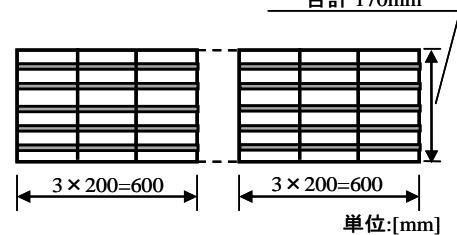


図 - 2. 積層ゴム支承のモデル化

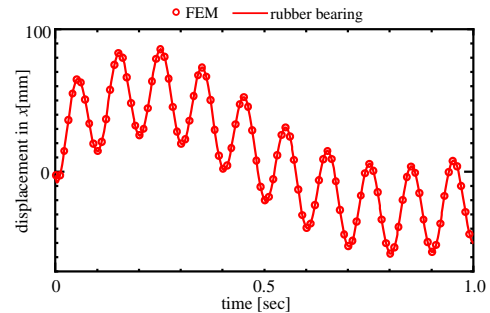


図 - 3. 各支承構造における変位応答の相違

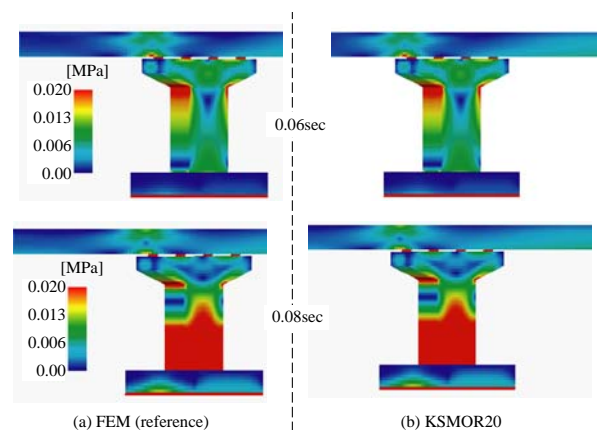


図 - 4. ゴム支承モデル時のミーゼス応力分布

参考文献

1) Bai Z. J., Su Y. F., Second Order Krylov Subspace and Arnoldi Method, Journal of Shanghai University(English Edition), Vol 8 Part 4, pp. 378-390, 2004