

MCMC と subset 法を用いた引張部材の破壊確率に対する確率分布の影響に関する検討

長崎大学工学部 学生会員 ○宮田喜生

長崎大学工学部 正会員 中村聖三

長崎大学工学部 フェロー 高橋和雄

1. まえがき

現在、道路橋の設計には許容応力度法が用いられているが、要求された性能を満たすことを合理的に検証する手段として、信頼性設計の考え方を基礎とする限界状態設計法の導入が求められている。信頼性設計では、終局限界状態に対して目標とする信頼性指標 β を用いるが、構造物の諸元や設計変数の確率分布形が異なれば、 β の値が同じでも破壊確率は異なる可能性が考えられる。破壊確率の算定方法としては、モンテカルロシミュレーションが考えられるが、構造物の破壊確率のように極めて小さい確率の現象を対象とする場合、非常に計算時間がかかるという難点がある。本研究では引張部材を対象に、設計変数の確率分布形を変化させて subset 法とマルコフ連鎖モンテカルロシミュレーション(以下、MCMC と記す)を用いて破壊確率を算定することにより、当該部材の破壊確率に対する確率分布形の影響を明らかにする。

2. 破壊確率の算定方法^{1), 2)}

破壊確率の算定方法を以下に簡単に説明する。確率変数の空間内の損傷領域を F とし、損傷確率を $P(F)$ とする。ここで、全体集合を F_0 、その部分集合を F_i と表し、 $F_m = F$ とする。

$$F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_m = F \quad (1)$$

損傷確率はこれらの部分集合を用いることにより次式で算定できる。

$$P(F) = P(F_m) = P(F_m | F_{m-1})P(F_{m-1} | F_{m-2}) \cdots P(F_1 | F_0) \quad (2)$$

限界状態関数 $z(x)$ 、確率変数ベクトル x の確率密度分布が与えられるとし、損傷状態を $z < 0$ と定義して、損傷確率を算定する。計算手順を以下に示す。

A) 確率変数の密度関数に従って、 n_t 個のサンプルを通常のモンテカルロシミュレーションと同様に発生させ、それぞれの限界状態関数の値を求める。部分空間のカウンター $i=0$ とする。

B) 限界状態関数の値を小さい順に並べ、 $z_1, z_2, z_3, \cdots$ とする。 $P(F_{i+1}|F_i) = n_i / n_t$ となる部分空間 F_{i+1} を次式で定義する。

$$F_{i+1} = \{x | z(x) < C_{i+1}\}, \quad C_{i+1} = \frac{z_{n_i} + z_{n_i+1}}{2} \quad (3)$$

C) MCMC によって、部分空間 F_{i+1} 内に n_t 個のサンプルを発生させる。サンプルの発生方法については文献 1), 2) を参照されたい。

D) $z < 0$ となるサンプルの個数 n_f が十分な場合 ($n_f > n_s$) には終了。そうでない場合は $i=i+1$ として手順 B) から繰り返す。

以上の手順により損傷が生じたサンプルが十分得られたら、次式によって破壊確率を求めることができる。

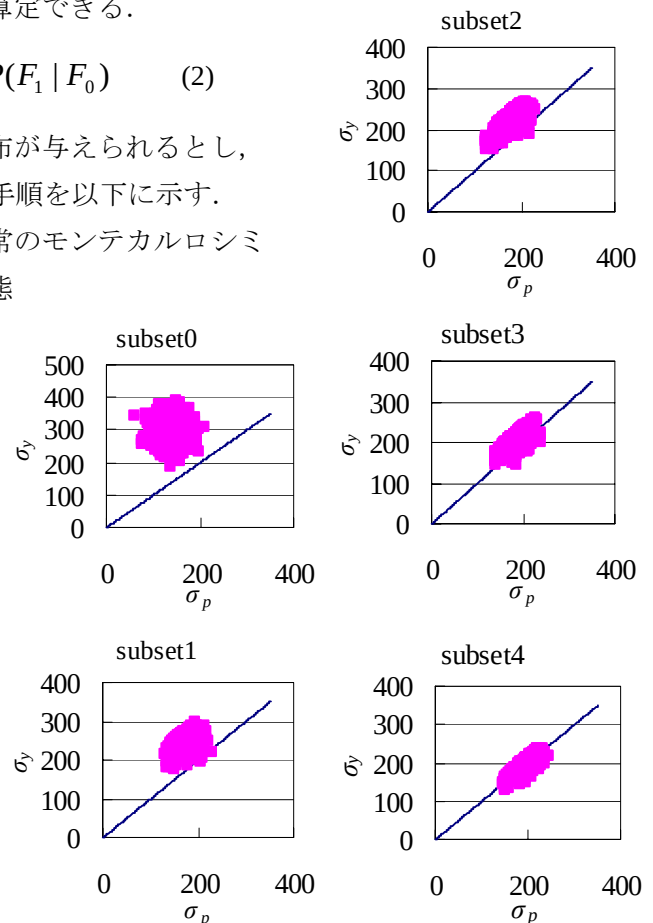
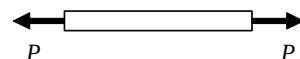


図-1 各部分空間内のサンプル

$$P(z < 0) = \left(\frac{n_s}{n_t} \right)^i \frac{n_f}{n_t} \quad (4)$$



n_s は部分空間の大きさを決めるパラメータである。

図-2 解析モデル

3. 検討概要

ばらつきを考慮する確率変数の確率分布形は正規分布、対数正規分布、あるいはワイブル分布に従うものと仮定し、サンプルの個数 $n_f=1000$, $n_t=100$ として解析を行った。解析対象は、図-2 に示すような軸力 P を受ける SM400 でできた引張部材である。 $P=1000\text{kN}$ に対して許容応力度設計法により断面積 $A=7143\text{mm}^2$ を決定した。ここでは、作用応力と材料降伏点を確率変数に従うものとし、以下に示す限界状態関数 z を用いた。限界状態関数 z を次式に示す。

$$z = \sigma_y - \sigma_p \quad (5)$$

ここで、 σ_y は材料降伏点、 σ_p は作用応力である。降伏点の統計量は、平均 289.5N/mm^2 、標準偏差 29.3N/mm^2 とした。作用応力については、平均 140N/mm^2 、標準偏差 21.0N/mm^2 とした。

表-1 解析結果

確率変数の分布形	破壊確率	変動係数
正規分布	1.57×10^{-5}	0.28
対数正規分布	2.31×10^{-5}	0.31
ワイブル分布	2.61×10^{-4}	0.24

4. 検討結果と考察

設計変数の確率分布を正規分布として、各部分空間内で、発生させたサンプルの一例を図-1 に示す。図-1 から、発生させたサンプルが徐々に限界状態に近づいていく様子が確認できる。今回の解析はサンプルサイズ $n_f=1000$ とし、 10^{-5} 程度の破壊確率を求めているため、総試行回数は 5000 回程度であり、 10^{-5} 程度の確率を求めることを考えれば効率的であるといえる。また、解析によって破壊確率を 50 回求め、その変動係数と平均した破壊確率の結果を表-1 に示す。設計変数を正規分布に従って発生させたとき、破壊確率は 1.66×10^{-5} となればよい。これに対して、本研究での解析結果は 1.57×10^{-5} となっており、ある程度理論値に近い値を得ることができた。分布形の破壊確率に対する影響については、ワイブル分布の破壊確率が他の分布に比べかなり大きくなっている。各分布の確率密度関数は図-3 のようになるが、ワイブル分布の確率密度関数は正規分布に比べ、小さい側の裾野が広い。そのため、破壊確率が大きくなったのだと考えられる。

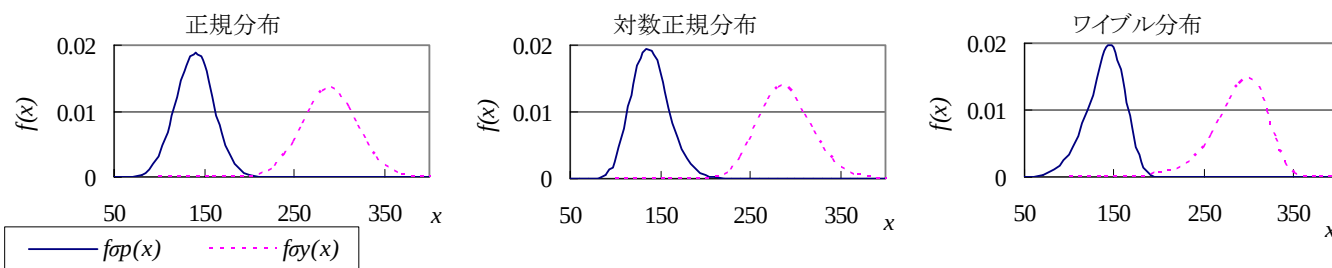


図-3 各確率変数の確率密度関数

5. まとめ

今回の研究で、設計変数の確率分布形が正規分布、対数正規分布、ワイブル分布である場合について、MCMC と subset 法を用いて、ある程度の精度で破壊確率を求められることが確認できた。今後、鋼 I 桁橋等のより複雑な構造モデルについて、同様の方法を用いて設計変数の確率分布形と破壊確率の関係を調べる予定である。

参考文献

- 1) Hitoshi Furuta, Kenta Miyake, Tadanobu Sato and Isao Tsukiyama: Reliability Analysis Using Markov-Chain Monte Carlo Simulation, Proceedings of the 9th Korea-Japan Joint Symposium on Steel Bridges, pp.17-28, 2007.8
- 2) 吉田郁政, 佐藤忠信: MCMC を用いた損傷確率算定方法, 土木学会論文集, No794/I-72, pp.43-53, 2005.7