B-spline Ritz 法による面外荷重を受ける傾斜機能平板の 3 次元応力解析

大分工業高等専門学校　都市システム工学科　学生会員　○鳥越枝奈
大分工業高等専門学校　専攻科機械・環境システム工学専攻　学生会員　竹尾恭平
大分工業高等専門学校　都市システム工学科　正会員　名木野晴暢
豊橋技術科学大学　機械システム工学系　非会員　樋口理宏
豊橋技術科学大学　機械システム工学系　非会員　足立忠晴

1. まえがき

傾斜機能材料 (Functionally Graded Materials; FGMs) は，1980 年代に熱応力緩和を目的とした航空宇宙用材料として，我国でその基本概念が発案された．ここで，FGMs とは，一方の表面から他方の表面へと材料組成などを変化，制御することによって要求する材料特性を発現させる材料であり，例えば，セラミックスと金属よりなる FGMs は，耐熱性耐熱衝撃性に優れるセラミックスと破壊靭性に優れる金属を効果的に利用する新しい材料である．また，FGMs は，複合材料の一種である積層材料の問題点であった界面を有さない材料として注目されている．

平板構造要素は，種々の構造物を構成する基本的な構造要素の一つである．したがって，傾斜機能材料から成る平板構造要素 (以下，傾斜機能平板) の力学的挙動を解明することは工学上重要である．しかしながら，先にも述べたように，FGMs が熱応力緩和の目的で開発された材料であるという背景からか，傾斜機能平板の熱力学的挙動に比べて，傾斜機能平板の静力学的挙動 (変位，ひずみ及び応力分布性状) は，十分に解明されていないように思われる．

本論文では，B-spline Ritz 法を用いて，面外荷重を受ける傾斜機能平板の 3 次元応力解析を実施し，(1) 面外荷重を受ける傾斜機能平板の 3 次元曲げ問題への B-spline Ritz 法の適用性と妥当性を検討する，(2) 傾斜機能平板の静力学的特性に与える板厚とヤング係数比の影響を明らかにする，の 2 点を目的としている．

2. B-spline Ritz 法による曲げ問題の定式化

ここでは，B-spline Ritz 法を用いて，面外荷重を受ける傾斜機能平板の曲げ問題を定式化する．**図-1** には，傾斜機能平板，直交座標系及び変位の定義が示してある．ここで，a, b, h は，それぞれ，平板の長さ，幅，高さであり，x, y, z 方向の変位成分をそれぞれ，u, v, w と定義する．また，分布荷重 $q(x, y)$ は，表面力として考慮する．FGMs の材料不均質性は，z 方向のみに依存するものとし，ヤング係数 $E(z)$ で表すものとする．ただし，E_b と E_t は，それぞれ，平板

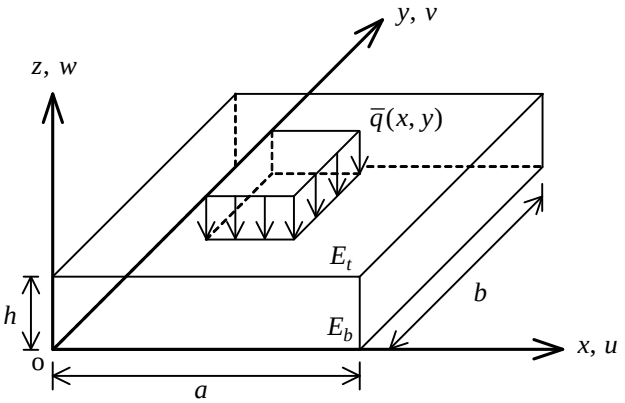


図-1　傾斜機能平板，直交座標系及び変位の定義

下面及び上面でのヤング係数であり，ポアソン比は一定とする．まず，定式化にあたり，次式のような無次元の正規化された座標系を導入する．

$$\xi = x/a,\ \eta = y/b,\ \zeta = z/h \tag{1}$$

3 次元弾性論に基づく傾斜機能平板の無次元変位 $U = u/a, V = v/a, W = w/a$ は，B-spline 関数の 3 重積で仮定する．ここでは，紙面の都合上，面外変位 W のみを示す．

$$W = \sum_{m=1}^{i_\xi}\sum_{n=1}^{i_\eta}\sum_{r=1}^{i_\zeta} C_{mnr} N_{m,k_\xi}(\xi) N_{n,k_\eta}(\eta) N_{r,k_\zeta}(\zeta) \tag{2}$$

正規化座標での傾斜機能平板のひずみエネルギー $\overline{U}$ と外力ポテンシャル $\overline{V}$ は，それぞれ，次式で与えられる．

$$\overline{U} = \frac{abhE_b}{2}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\}\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi \tag{3}$$

$$\overline{V} = a^2 b\int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\eta_1}^{\eta_2} \overline{q}(\xi,\eta) W\big|_{\zeta=1}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi \tag{4}$$

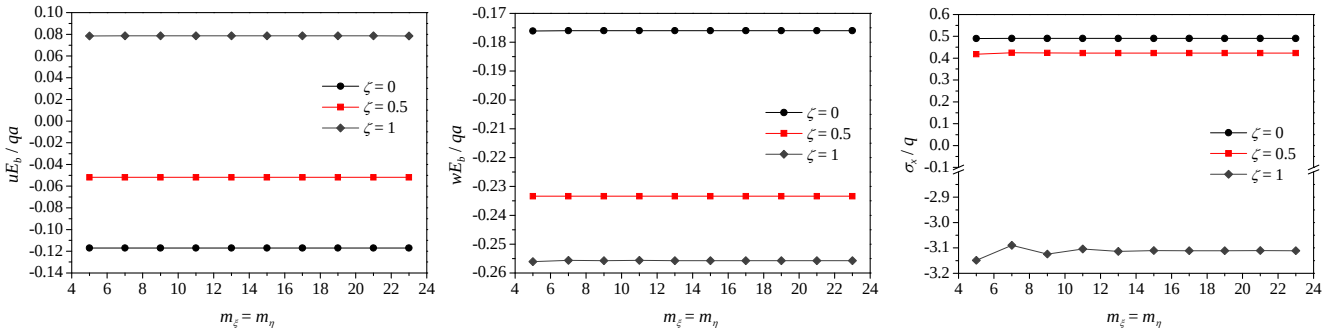
したがって，傾斜機能平板の全ポテンシャルエネルギー Π は，次式で表される．

$$\Pi = \overline{U} - \overline{V} \tag{5}$$

ここで，Ritz 法を適用すれば，

$$[\mathrm{K}]\{\Delta\} = \{\mathrm{f}\} \tag{6}$$

を得る．よって，これを解けば，変位，ひずみ及び応力が求められる．なお，[K] は正値対称行列なので，線形代数方程式の解法には，修正 Cholesky 法を採用している．



(a) 面内変位 $(\xi, \eta) = (0, 0.5)$　(b) 面外変位 $(\xi, \eta) = (0.5, 0.5)$　(c) 応力 $(\xi, \eta) = (0.5, 0.5)$

図-1　厚肉傾斜機能平板の面外変位と応力の収束性に与える区分点の数の影響：$h/a = 0.5, b/a = 1, E_t/E_b = 10$

3. 数値計算例及び考察

ここでは，面外荷重を受ける傾斜機能平板の静力学的特性に与える板厚比h/aとヤング係数比E_t/E_b の影響について明らかにする．数値計算例では，ポアソン比$\nu = 0.3$ とし，等分布満載荷重q を受ける正方形平板$b/a = 1$を取り扱う．また，ヤング係数$E(\zeta)$ は，次のように仮定する．

$$E(\zeta) = E_b \exp(p\zeta), \quad p = \ln(E_t / E_b) \tag{7}$$

図-1 には，$E_t/E_b = 10$ なる厚肉傾斜機能平板 $(h/a = 0.5)$ の平板下面 $(\zeta = 0)$，中央面 $(\zeta = 0.5)$ 及び 上面 $(\zeta = 1)$ における面内変位uE_b / qa，面外変位wE_b / qa 及び応力σ_x / q の収束性に与える区分点の数$m_\xi = m_\eta$ の影響が示してある．ここで，厚さ方向の区分点の数は，$m_\zeta = 11$ で固定している．これより，面内変位，面外変位及び応力の値は，ζ の座標位置に係わらず，区分点の数の増大に伴い，早く，安定した収束状態が示されている．なお，$E_t/E_b = 100$ も検討しているが，同様の結果が得られている．

表-1 には，面外荷重$\bar{q}(\xi, \eta) = q \sin(\pi\xi)\sin(\pi\eta)$ を受ける傾斜機能平板 $(E(\zeta) = E_b \exp\{p(\zeta - 1)\})$ の面外変位$w G_b / qh$ の精度比較が示してある．ここで，$h/a = 1/3$ に設定し，p の値を10^{-2}から10^{-6}まで変化させている．なお，$p = 0$ は均質平板を意味する．また，解の精度比較のために，Kashtalyan[1] の級数解と名木野ら[2] の均質平板の級数解による結果も示してある．これより，本解析法による数値解は，p の値に係わらず，Kashtalyan[1] の級数解とよく一致していることが確認でき，また，$p = 10^{-6}$ 以下に取れば，ほぼ均質平板と見なすことができることがわかる．

図-2 には，厚肉傾斜機能平板 $(h/a = 0.5)$ の板厚方向の応力σ_x / q 分布に与えるヤング係数比E_t/E_b の影響が示してある．ここで，E_t/E_b の値を 1 から 10 まで変化させている．ただし，$E_t/E_b = 1$ は均質平板を意味する．これより，$E_t/E_b > 1$ の範囲では，平板上面で均質平板よりも大きな圧縮応力を生じているが，平板の内部ではほぼ一様な引張応力状態でその値は圧縮応力よりも小さい．

表-1　面外変位$w G_b / qh$ の精度比較：$h/a = 1/3, b/a = 1$

p	Methods	$w G_b / qh$		
		$\zeta = 0$	$\zeta = 0.5$	$\zeta = 1$
10^{-2}	Present	-1.2153	-1.3496	-1.3903
	Kashtalyan[1]	–	-1.3496	–
10^{-4}	Present	-1.2093	-1.3426	-1.3833
	Kashtalyan[1]	–	-1.3426	–
10^{-6}	Present	-1.2092	-1.3426	-1.3832
	Kashtalyan[1]	–	-1.3426	–
0	Present	-1.2092	-1.3426	-1.3832
	Nagino et al.[2]	-1.2092	-1.3426	-1.3832

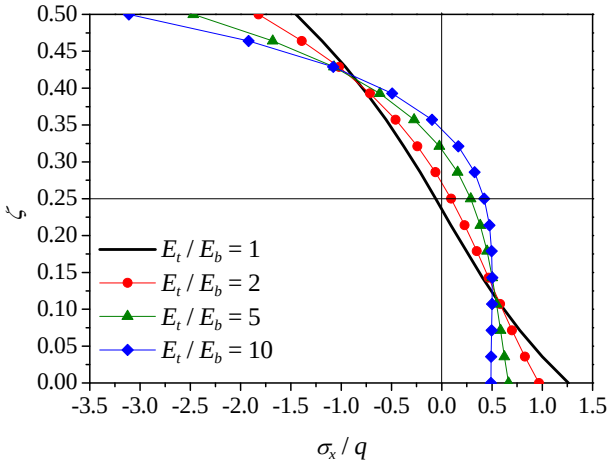


図-2　厚肉傾斜機能平板の板厚方向の応力σ_x 分布に与えるヤング係数比E_t/E_b の影響：$h/a = 0.5, b/a = 1$

4. まとめ

本論文では，B-spline Ritz 法を用いて，面外荷重を受ける傾斜機能平板の 3 次元応力解析を行った．B-spline Ritz 法の解の収束状態は良好であり，高い解析精度を有することを確認した．さらに，厚肉傾斜機能平板の応力分布特性の一部を明らかにした．

参考文献

1) Kashtalyan, M.: European Journal of Mechanics A/Solid, Vol. 23 A, pp. 853-864, 2004.

2) 名木野ら：応用力学論文集，Vol. 12, pp. 43-54, 2009.