

斜め平板の 3 次元応力解析への B-spline Ritz 法の適用性に関する基礎的検討

大分工業高等専門学校 都市システム工学科

大分工業高等専門学校 都市システム工学科

Wayne State University Department of Civil and Environmental Engineering

北海道大学大学院 工学研究科北方圏環境政策工学専攻

大同大学 都市環境デザイン学科

学生会員 ○平 村 萌

正 会 員 名木野晴暢

学生会員 全 邦 釘

フェロー会員 三 上 隆

正 会 員 水澤 富作

1. まえがき

斜め平板は、航空機の翼構造や橋梁の斜スラブに代表されるように、種々の工学分野で用いられている基本的な構造要素の一つであり、その力学的挙動を正確に把握することは重要である。しかし、斜め平板の基礎方程式を厳密に解くことは困難であり、解を解析的又は近似的に評価しなければならないが、斜め平板では、曲げとねじりが連成し、斜角の増大に伴う鈍角部での応力の特異性が顕著になるため、長方形平板と異なり、解析精度に相当なばらつきが見受けられる。従って、この鈍角部における特異性を表現でき、ベンチマークに耐えうる解析精度の高い数値解を求めることができる数値解析法の存在は重要である。

従来、斜め平板の曲げ問題は、級数解を求める解析的手法や差分法、differential quadrature 法、有限要素法、有限帯板法、Ritz 法、spline 要素法及び spline 帯板法などの数値解析法により解かれてきたが、その多くが古典理論に基づくものである。また、面外せん断変形の影響を考慮したせん断変形理論に基づく解析例は極めて少なく、3 次元弾性論に基づく解析例は見当たらない。

本論文では、面外荷重を受ける斜め平板の 3 次元応力解析への B-spline Ritz 法の適用性を明らかにすることを目的とし、その基礎的な検討を実施した。

2. B-spline Ritz 法による斜め平板の曲げ問題の定式化

ここでは、B-spline Ritz 法を用いて、面外荷重を受ける斜め平板の曲げ問題を定式化する。図-1 には、斜め平板、直交座標系 (x, y, z) 及び変位の定義が示してある。ここで、 θ は斜角であり、3 次元弾性論に基づく等質・等方な斜め平板は微小変形かつ線形弾性であると仮定する。また、平板下面は自由面とし、平板上面に作用する面外荷重 $q(x, y)$ は表面力として考慮するものとする。まず、定式化にあたり、図-2 に示すような親座標系 (ξ, η, ζ) の立方体への写像を考える。親座標系は、直交座標系と次のような関係にある。

$$x = a\xi + b\eta \sin \theta, \quad y = b\eta \cos \theta, \quad z = h\zeta \quad (1)$$

無次元変位 $U = u/a, V = v/a, W = w/a$ は、B-spline 関数

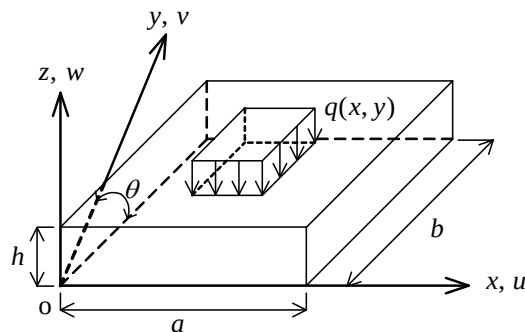


図-1 斜め平板、直交座標系 (x, y, z) 及び変位の定義

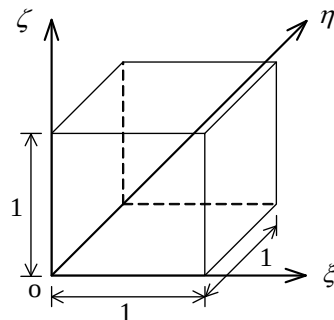


図-2 親座標系 (ξ, η, ζ)

の 3 重積で仮定する。紙面の都合上、 W のみを示す。

$$W = \sum_{m=1}^{i_\xi} \sum_{n=1}^{i_\eta} \sum_{r=1}^{i_\zeta} C_{mnr} N_{m,k_\xi}(\xi) N_{n,k_\eta}(\eta) N_{r,k_\zeta}(\zeta) \quad (2)$$

$\bar{U}$ をひずみエネルギー、 $\bar{V}$ を外力ポテンシャルとすれば、親座標系における斜め平板の全ポテンシャルエネルギー Π は、 $\Pi = \bar{U} - \bar{V}$ で表される。ここで、Ritz 法を適用すれば、次式のような線形代数方程式を得る。

$$[K]\{\Delta\} = \{f\} \quad (3)$$

よって、これを解けば、変位、ひずみ及び応力が求められる。なお、 $[K]$ は正値対称行列なので、線形代数方程式の解法には、修正 Cholesky 法を採用している。

3. 数値計算例及び考察

ここでは、面外荷重を受ける斜め平板の 3 次元応力解析への B-spline Ritz 法の適用性を検討する。数値計算例では、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、辺長比 $b/a = 1$ とし、面外分布荷重は等分布満載荷重 q とする。

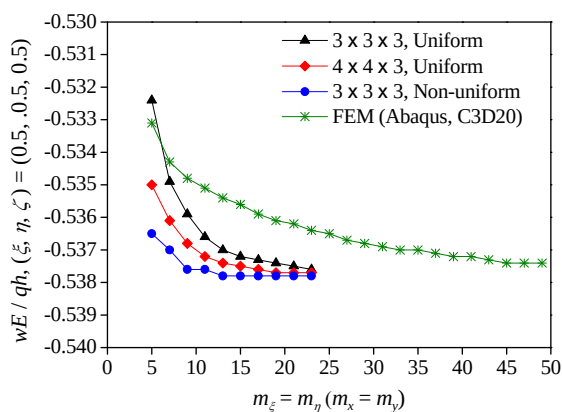


図-3 厚肉正方形平板の中央点での面外たわみ w の収束状態と有限要素法の解の収束状態との比較

図-3 には、等分布満載荷重を受ける周面固定された厚肉正方形平板 ($\theta=0^\circ$, $h/a=0.5$) の板中央点 $(\xi, \eta, \zeta)=(0.5, 0.5, 0.5)$ における面外たわみ w の収束性に与える spline 次数及び区分点の数と配置方法の影響が示してある。ここで、spline 次数は、 ξ, η, ζ 方向に $3 \times 3 \times 3$, $4 \times 4 \times 3$ に設定し、区分点の配置は、等間隔 (Uniform) と Chebyshev 多項式の零根 (Non-uniform) とした。また、汎用有限要素コード Abaqus による 2 次のソリッド要素 (C3D20) による数値解の収束状態も示してある。

これより、B-spline Ritz 法による解の収束状態は早く、良好であるが、有限要素法の収束状態は、かなり緩やかで遅い。また、spline 次数を高めることで解の収束性が改善され、早くなることが確認できる。さらに、同じ spline 次数であっても、区分点の配置を等間隔配置から不等間隔にすることで解の収束性が大きく改善され、有限要素法よりもかなり少ない未知数で解の収束値を得ている。

図-4 には、相対する直線面が固定され、他の斜面が自由な中等厚肉斜め平板 ($\theta=60^\circ$, $h/a=0.1$) の鈍角点 $(\xi, \eta, \zeta)=(1, 0, \zeta)$ と中央点 $(\xi, \eta, \zeta)=(0.5, 0.5, \zeta)$ の応力 σ_x の収束状態が示してある。

これより、斜め平板中央点の応力の値は、区分点の増大に伴い、一定の値に収束しているが、鈍角点の上面及び下面の応力の値は、区分点の数の増大に伴い、有限値に留まることなく、発散している。したがって、B-spline Ritz 法は、鈍角点の応力の特異性を再現できているものと判断できる。

表-1 には、等分布満載荷重を受ける周面固定された薄肉斜め平板 ($h/a=0.01$) の板中央点 $(\xi, \eta)=(0.5, 0.5)$ における面外たわみ $w^*=wD/10^{-3}qa^4$ ($\zeta=0.5$) と主モーメント $M_1^*=M_1/10^{-2}qa^2$, $M_2^*=M_2/10^{-2}qa^2$ の精度比較が示してある。ここで、解の精度比較のために、小林らによる古典理論に基づく解析解、Mizusawa による古典理論に基づく

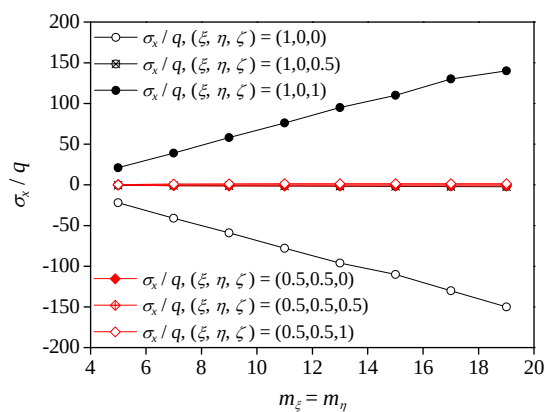


図-4 中等厚肉斜め平板の鈍角点と中央点の応力 σ_x の収束状態: $\theta=60^\circ$, $h/a=0.1$

表-1 周面固定薄肉斜板の解の精度比較: $h/a=0.01$

θ	Method	w^*	M_1^*	M_2^*
0°	Present	1.266	2.292	2.292
	Ref. 2	1.265	2.291	2.291
	Ref. 3	1.267	2.289	2.289
	ANSYS	1.268	2.293	2.293
30°	Present	0.7700	1.980	1.546
	Ref. 1	0.7690	1.979	1.544
	Ref. 2	0.7691	1.979	1.544
	Ref. 3	0.7704	1.978	1.542
	ANSYS	0.7709	1.980	1.547
60°	Present	0.1086	0.8047	0.4536
	Ref. 1	0.1082	0.8029	0.4539
	Ref. 2	0.1089	0.8051	0.4591
	Ref. 3	0.1089	0.8033	0.4539
	ANSYS	0.1088	0.8035	0.4551

く spline 要素法による数値解及び全・Fu³⁾ による Mindlin 理論に基づく解析解と汎用有限要素コード ANSYS (Mindlin 要素) の数値解も示してある。

これより、B-spline Ritz 法による解は、斜角 θ に係わらず、古典理論及び Mindlin 理論に基づく解析解及び数値解と非常に良い一致を示しており、B-spline Ritz 法による数値解の妥当性が確認できる。

4. まとめ

本論文では、面外荷重を受ける斜め平板の 3 次元応力解析への B-spline Ritz 法の適用性に関する基礎的な検討を行った。今後、詳細な検討を実施していく必要はあるが、B-spline Ritz 法の適用性は十分にあると判断できよう。

参考文献

- 1) 小林ら：構造工学論文集, Vol. 41 A, pp. 41-48, 1995.
- 2) Mizusawa: Compt. and Struct., Vol. 53, pp. 439-448, 1994.
- 3) 全・Fu：応用力学論文集, Vol. 12, pp. 15-25, 2009.