

面外荷重を受ける周面単純支持された傾斜機能弾性体の解析解の導出

大分工業高等専門学校 専攻科機械・環境システム工学専攻
 大分工業高等専門学校 都市システム工学科
 豊橋技術科学大学 機械システム工学系
 豊橋技術科学大学 機械システム工学系

学生会員 ○竹尾 恭平
 正会員 名木野晴暢
 非会員 樋口理宏
 非会員 足立忠晴

1. まえがき

傾斜機能材料 (Functionally Graded Materials, FGMs) は, 1980 年代に熱応力緩和の目的でその基本概念が発案されて以来, 傾斜機能材料から成る平板構造要素 (以下, 傾斜機能平板) に関する研究が数多くされている. FGMs とは, 一方の表面から他方の表面へ材料組成, 微視構造, 気孔率などを連続的に変化, 制御することで要求する材料特性の発現を行える界面を有さない材料であり, その無限の可能性から航空宇宙, 機械, 生体, 土木, 建築など多岐にわたる分野での応用が期待されている.

傾斜機能平板の力学的挙動の解明に関する研究の多くは, 熱応力緩和を目的としたものが多く, 静力学的及び動力学的挙動に関する研究報告は少ない. また, 数値解析法を用いた研究が先行しているため, 解の精度がどの程度あるのかを判断することが難しい. よって, 3次元弾性論に基づく傾斜機能平板の解析解 (級数解) を導出し, 解の収束性や性質を詳細に調べ, 数値解析法による近似解のベンチマークに耐えることのできる数値解を求めておくことは, 十分に意味のあることと考えられる.

本論文では, 傾斜機能平板を3次元弾性論に従う弾性体として, 面外荷重を受ける周面単純支持された傾斜機能弾性体の板厚方向に閉じた形式の解析解を導出し, その収束性や妥当性について検討することを目的としている.

2. 基礎方程式と境界条件

材料の不均質性は板厚方向にのみ依存するものとし, 本論文では, 次のように仮定する.

$$E(z) = E_b \exp\{p(z/h)\}, \quad p = \ln(E_t/E_b) \quad (1)$$

ここで, E_b と E_t は, それぞれ弾性体の下面及び上面の縦弾性係数であり, p は縦弾性係数比 E_t/E_b に依存する材料の不均質性を表すパラメータである. なお, ポアソン比 ν は一定であると仮定する. 図-1 には, 傾斜機能弾性体, 直交座標系及び変位の定義が示してある. ここで, a, b, h は, それぞれ, 平板の長さ, 幅, 高さであり, x, y, z 方向の変位成分をそれぞれ, u, v, w と定義する. また, 分布荷重 $q(x, y)$ は表面力として考慮し, 物体力の影響は無視する. 傾斜機

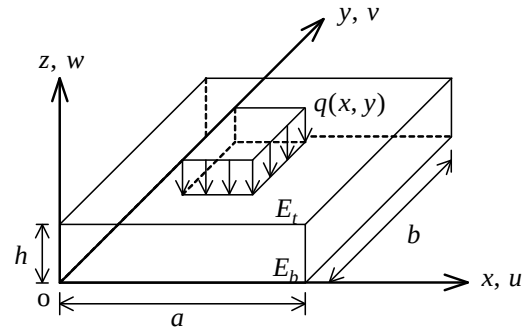


図-1 傾斜機能弾性体, 直交座標系及び変位の定義

能弾性体の基礎方程式は, 次のように導かれる.

$$\delta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + G_b \nabla^2 u + G_b \left(\frac{p}{h} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\delta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) + G_b \nabla^2 v + G_b \left(\frac{p}{h} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0,$$

$$\delta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + G_b \nabla^2 w + \mu_b \left(\frac{p}{h} \right) e + 2G_b \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\delta = \mu_b + G_b, \mu_b = \nu E_b / \{ (1 + \nu)(1 - 2\nu) \}, G_b = E_b / \{ 2(1 + \nu) \} \quad (3)$$

ここで, ∇^2 は Laplacian, e は体積ひずみである. また, 面外荷重を受ける周面単純支持された傾斜機能弾性体の境界条件は, 次のように定義される.

$$v = w = 0, \sigma_x = 0 \quad (x = 0, a); u = w = 0, \sigma_y = 0 \quad (y = 0, b) \quad (4)$$

$$\sigma_z = 0, \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (z = 0), \sigma_z = q(x, y), \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (z = h) \quad (5)$$

3. 面外荷重を受ける傾斜機能弾性体の解析解の導出

解析解の導出にあたり, 次のような無次元座標及び無次元変位を導入する.

$$\xi = x/a, \eta = y/b, \zeta = z/h \quad (6)$$

$$U = u/h, V = v/h, W = w/h \quad (7)$$

無次元変位は, 傾斜機能弾性体の周面の境界条件を完全に満足するように次式で仮定する.

$$U(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(\zeta) \cos(m\pi\xi) \sin(n\pi\eta),$$

$$V(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(\zeta) \sin(m\pi\xi) \cos(n\pi\eta),$$

$$W(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(\zeta) \sin(m\pi\xi) \sin(n\pi\eta) \quad (8)$$

ここで, $U_{mn}(\zeta)$, $V_{mn}(\zeta)$, $W_{mn}(\zeta)$ は未知関数である. また, 面外荷重を次のように 2 重正弦 Fourier 級数展開する.

$$q(\xi, \eta) = q_0 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(m\pi\xi) \sin(n\pi\eta) \quad (9)$$

ただし, q_0 は分布荷重強度であり, Q_{mn} は Fourier 係数である. ここで, 式(6)及び(7)を式(2)に代入し, 無次元化された基礎方程式を誘導して, これに式(8)を代入すれば, 次のような特性方程式が得られる.

$$\lambda^4 + 2p\lambda^3 + (p^2 - 2g^2)\lambda^2 - 2pg^2\lambda + \left(g^4 + \frac{\nu}{1-\nu}p^2g^2\right) = 0 \quad (10)$$

ただし, $g^2 = M^2 + N^2$, $M = m\pi h/a$, $N = n\pi h/b$ である. ここで, $\nu \neq 0$ か $p \neq 0$ とすれば, この特性方程式の根は, 2 組の共役複素根となる. 以上より, 未知関数 $U_{mn}(\zeta)$, $V_{mn}(\zeta)$, $W_{mn}(\zeta)$ の一般解が次のように求められる.

$$U_{mn}(\zeta) = A_{mn} \exp(\Gamma_1 \zeta) \cos(\Xi \zeta) + B_{mn} \exp(\Gamma_1 \zeta) \sin(\Xi \zeta) + C_{mn} \exp(\Gamma_2 \zeta) \cos(\Xi \zeta) + D_{mn} \exp(\Gamma_2 \zeta) \sin(\Xi \zeta),$$

$$V_{mn}(\zeta) = \left(\frac{N}{M}\right) U_{mn}(\zeta),$$

$$W_{mn}(\zeta) = A_{mn} \exp(\Gamma_1 \zeta) \{\phi_1 \cos(\Xi \zeta) + \psi_1 \sin(\Xi \zeta)\} + B_{mn} \exp(\Gamma_1 \zeta) \{\phi_1 \sin(\Xi \zeta) - \psi_1 \cos(\Xi \zeta)\} + C_{mn} \exp(\Gamma_2 \zeta) \{\phi_2 \cos(\Xi \zeta) + \psi_2 \sin(\Xi \zeta)\} + D_{mn} \exp(\Gamma_2 \zeta) \{\phi_2 \sin(\Xi \zeta) - \psi_2 \cos(\Xi \zeta)\} \quad (11)$$

ここで, A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , D_{mn} は未定係数である. なお, Γ_1, Γ_2 , $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2, \Xi$ の詳細は紙面の都合上割愛する. よって, 式(5)を無次元化し, 式(11)を代入すれば, 4 つの代数方程式が得られ, それらを行列表示すると次のとおりである.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \\ D_{mn} \end{Bmatrix} = \frac{q_0}{E_b} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\exp(p)} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

ただし, K_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) の詳細も紙面の都合上割愛する. なお, 式(12)は, Cramer の公式を用いれば, 各級数ごとに陽な形式で未定係数を求めることができる.

4. 解析解の収束性と妥当性に関する検討

ここでは, 導出した解析解の収束性及び解の妥当性について検討する. 数値計算では, 等分布満載荷重を受ける正方形弾性体 $b/a = 1$ を取り扱い, ポアソン比 $\nu = 0.3$ とする.

図-2 と図-3 には, それぞれ, 縦弾性係数比 $E_t/E_b = 10$ である傾斜機能弾性体 ($h/a = 0.5$) の中央点 $(\xi, \eta) = (0.5, 0.5)$ における面外たわみ w 及び応力 σ_x と級数項 $m = n$ の関係が示してある. これより, 下面 (Bottom; $\zeta = 0$), 中央面 (Middle; $\zeta = 0.5$), 上面 (Top; $\zeta = 1$) における w と σ_x の値は, $m = n$ の増大に伴い, 一定値へ収束しているが, 弾性体上

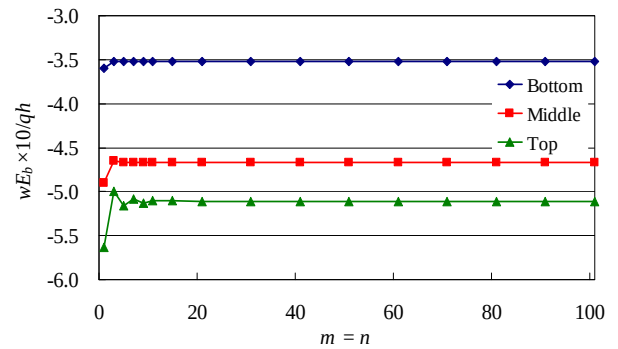


図-2 中央点における面外たわみ w と級数項の関係

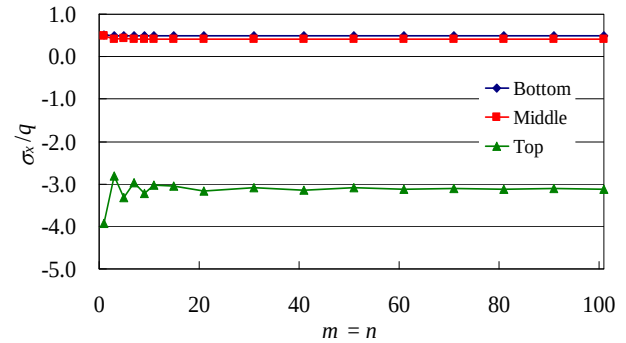


図-3 中央点における応力 σ_x と級数項の関係

表-1 解析解の精度比較

p	Method	$wE_b \times 10 / qh$			σ_x / q	
		Middle	Bottom	Top		
10^{-1}	Present	-7.340	3.211	-3.584		
	Ritz	-7.340	3.211	-3.589		
10^{-3}	Present	-7.698	3.323	-3.468		
	Ritz	-7.698	3.323	-3.473		
10^{-5}	Present	-7.701	3.324	-3.467		
	Ritz	-7.701	3.324	-3.472		
0	Ref. 1	-7.702	3.324	-3.468		

面での収束はやや遅いようである. また, $E_t/E_b = 100$ の場合でも同様の結果が得られていることを確認している.

表-1 には, 本論文で誘導した解析解 (Present) の精度比較が示してある. ここで, $h/a = 0.3$ としている. また, 解の精度検証のために, Ritz 法による数値解 (Ritz) と均質弾性体の級数解の結果¹⁾も併記した. これより, 解析解は, 不均質パラメータ p に係わらず, Ritz 解と良く一致している. また, $p = 10^{-5}$ の結果は, 均質弾性体の結果¹⁾とも良い一致を示しており, ほぼ均質弾性体であることがわかる.

5. まとめ

本論文で導出した面外荷重を受ける傾斜機能弾性体の解析解は, 十分妥当であることを確認した.

参考文献

- 1) 名木野ら: 応用力学論文集, Vol. 12, pp. 43-54, 2009.