

線材置換による非抗圧膜構造の効率的な大変形解析手法に関する研究

佐賀大学 学生会員 岩崎良則

正会員 井嶋克志, 帯屋洋之, 川崎徳明

1. まえがき

膜構造物は軽量であるとともに収納性や展開性に優れているため、大空間ドームなどの大規模膜構造物から膜面アンテナなどの宇宙構造物にまで幅広く利用されている。張力によりその形態を維持する膜構造物は仮設時に大変位とともにその状態は大きく変化する。このように膜の弛緩状態を含めた計算を容易に行うため、定ひずみ三角形要素を柔ケーブルに置換した非抗圧膜モデルによる解析法を開発した¹⁾。この解析法を用いれば正剛性の柔ケーブルを主体とした膜モデルではニュートン・ラブソン法により安定かつ少ない反復計算により解を得ることができる。しかし、ポアソン比と要素形状次第では負剛性ケーブルを有する膜モデルとなり、計算量が膨大となる動的緩和法を用いざるを得ない場合が生じる。

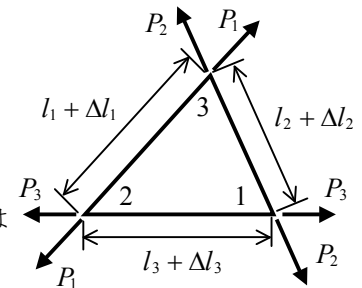


図-1 定ひずみ三角形要素

本研究は、ポアソン比 1/3 膜材のケーブルユニット膜モデルの特殊性と合理性に着目し、可能な限り動的緩和法を使用することなくニュートン・ラブソン法により効率的に膜構造の大変形解析を行う手法について検討を行ったものである。膜の大変形現象ではポアソン比の差異による変位形状の変化は小さく、ポアソン比 1/3 の平衡解を初期状態として正しいポアソン比による計算を行えば動的緩和法を使用しない若しくは 1 回の使用のみで済むと考えられる。

2. ひずみエネルギー等価条件による定ひずみ三角形要素の線材置換

平面に置かれた定ひずみ三角形要素に静定な拘束条件を与えることにより、図-1 に示す独立な 3 自由度の要素変形とこれに仕事の対となる要素端力との関係が次のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \frac{D}{4A} \begin{bmatrix} e_1^2 + \mu l_1^2 & e_1 e_2 - \mu l_1 l_2 & e_3 e_1 - \mu l_3 l_1 \\ e_2^2 + \mu l_2^2 & e_2 e_3 - \mu l_2 l_3 & e_3 e_2 - \mu l_3 l_2 \\ \text{sym.} & e_3^2 + \mu l_3^2 & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{31} \\ & K_{22} & K_{23} \\ \text{sym.} & & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \end{Bmatrix}, \quad D = \frac{Et}{1-\nu^2}, \quad \mu = \frac{1-\nu}{2} \quad (1a, b, c)$$

ここに、膜材は等方性と仮定し、 t : 膜厚、 A : 無応力時要素面積、 E : ヤング率、 ν : ポアソン比、 l_n, e_n : 無応力要素における辺 n の長さおよび頂点 n と垂心間の距離である。

6 本の軸力部材により式(1a)と等価な 1 次不静定トラス構造を構成する。定ひずみ要素と同一形状を形成する辺部材を主材、3 頂点から射出し 1 点で結合する 3 部材を副材、この結合点を補助点と呼ぶ。主材の伸び剛度および副材の伸び剛度を適切に定める¹⁾とともに、補助点を主材からの距離 h_1, h_2, h_3 に位置するものとして式(3a,b,c)のように設定すればユニット構造の剛性方程式は式(1a)と等しくなる。 a_n を頂点 n からの垂線の長さとするれば、

$$h_1 = K_{23} / K_{st}, \quad h_2 = K_{31} / K_{st}, \quad h_3 = K_{12} / K_{st} \quad (3a,b,c) \quad \text{ここに, } K_{st} = K_{23} / a_1 + K_{31} / a_2 + K_{12} / a_3 \quad (4)$$

以上のように得られた軸力材を弾性カテナリーケーブルあるいは双曲線軸力材に置換¹⁾すれば非抗圧膜モデルとなる。

3. ポアソン比 1/3 膜材のケーブルユニット構造

ポアソン比 1/3 の定ひずみ膜要素に前節の線材置換を行えば、補助点が存在せず要素形状が最小内角 30° 以上であれば全て正剛性のケーブル部材によって構成されたユニット構造となる。これにより比較的自由に要素分割が可能となり、膜全体構造の自由度も大幅に減少し計算量が削減できる。さらに、ニュートン・ラブソン法を用いて安定かつ少ない収束計算が可能となる。

ポアソン比 1/3 の正三角形要素では式(1a)の非対角項全てがゼロとなり、副材を用いることなく主材のみによって定ひずみ要素に等価なユニット構造を構成できる。

一方、正三角形と異なる要素形状ではポアソン比が $\nu \rightarrow 1/3$ のとき式(4)が $K_{st} \rightarrow 0$ 、これにより $|h_1|, |h_2|, |h_3| \rightarrow \infty$ となる。このことは補助点が無限遠点に存在し、副材長は無限大となることを意味する。しかし、副材の伸び剛

度は正值として存在するから要素の変形に伴い要素頂点に軸力が作用する．また，その軸力方向は式(3)を用いて $h_1:h_2:h_3 = K_{23}:K_{31}:K_{12}$ から次のように定めることができる．

正三角形と異なるポアソン比 1/3 の要素では式(1a)における 3 個の非対角項の内，一つの項のみ他と符号が異なる．例えば， K_{12} のみ他と符号が異なる場合，図-2 のように頂点 3 に接続される副材方向が対辺と交わり，その交点は h_1, h_2, h_3 の比によって与えられる．図中の r_3 は θ_1, θ_2 を要素の内角として次式によって表され，この比は要素変形後も変化しないものとする．

$$r_3 = \frac{K_{31} \sin \theta_2}{K_{23} \sin \theta_1 + K_{31} \sin \theta_2} \quad (5)$$

副材軸力については，図-2 に示すように無限長であっても要素変形後も一定である区間長を定義すれば，要素変形そのものが副材の伸縮量となり軸力を得る．要素を通過する直線 AB は，図中の寸法 l_4, l_5, l_6 の伸縮量 $\Delta l_4, \Delta l_5, \Delta l_6$ による次の副材軸力が釣り合うことから決定する．

$$N_4 = k_s \Delta l_4, \quad N_5 = k_s \Delta l_5, \quad N_6 = k_s \Delta l_6 \quad (6a,b,c)$$

ここに， k_s は前節により定まる副材伸び剛度である．

4. ポアソン比 1/3 膜構造の大変形解析例

ポアソン比 1/3 である一辺 31.1cm の正方形平面膜のインフレーション解析を数値計算例として示す．膜材は，膜厚：0.01cm ヤング率：20000 N/cm²，単位体積重量：9.016 × 10⁻⁶ N/cm³ である．1936 個の直角二等辺三角形により平面膜を構成し，内圧を与えた釣合形状を解析する．膜周辺の節点は常に鉛直方向を固定している．

図 3(1)は膜周辺全節点を水平方向も固定として平面状態から中央節点に 3cm の鉛直上方強制変位を与えた平衡形状である．(1)から 4 隅の節点を除く周辺節点を水平 2 方向可動として内圧 0.01Pa を与えた形状が図-3(2)であり中央節点は固定である．4 隅固定のまま周辺節点を水平可動，中央節点を鉛直方向可動として内圧を 0.05Pa に増加させれば図-3(3)の平衡形状を得る．次に同じ内圧の状態で，4 隅の節点を平面对角線方向に可動とすれば図-3(4)を得る．

これら全てニュートン・ラプソン法の反復計算によって安定な収束過程により平衡解を得た．一例として，図-3(1)から(2)に至る最大不平衡力の収束過程を図-4 に示す．



図-4 最大不平衡力の収束過程

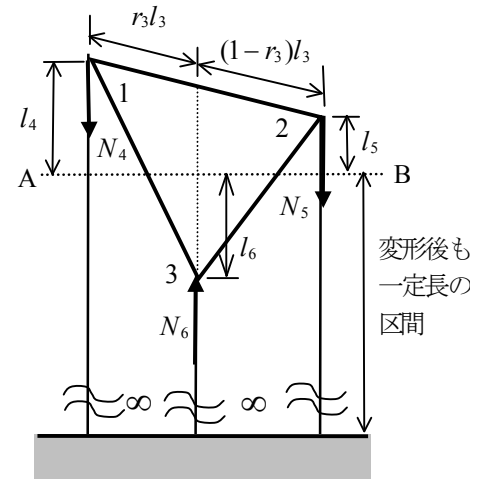
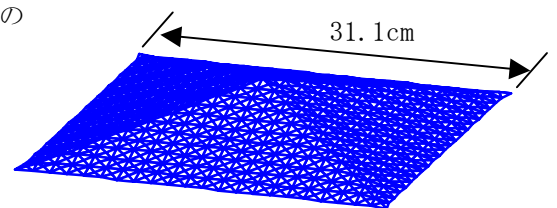
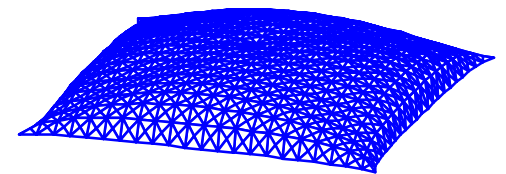


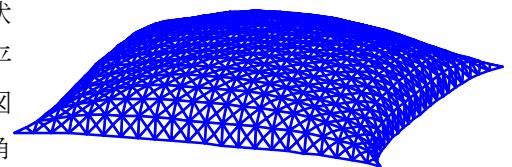
図-2 ポアソン比 1/3 における副材力学モデル



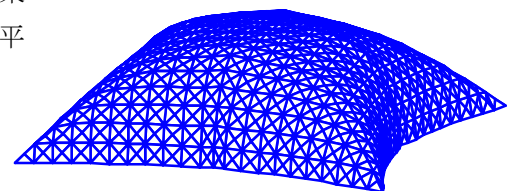
(1) 中央節点に鉛直上方強制変位



(2) 内圧 0.01Pa (中央節点と 4 隅固定)



(3) 内圧 0.05Pa (4 隅固定)



(4) 内圧 0.05Pa

図-3 正方形平面膜のインフレーション解析

参考文献：1)井嶋克志，帯屋洋之，川崎徳明：空間柔ケーブルによる非抗圧膜構造モデルの有限変位解析，構造工学論文集，Vol.55A, pp.11-22, 2009.3.