

ひずみエネルギーによる面外荷重を受ける弾性基礎にある平板の曲げ特性評価

熊本大学

工学部社会環境工学科

学生会員 ○多田 裕 治

大分工業高等専門学校

都市システム工学科

正 会 員 名木野晴暢

豊橋技術科学大学

機械システム工学系

非 会 員 樋口 理 宏

足利工業大学

都市環境工学科

正 会 員 末 武 義 崇

大同大学

都市環境デザイン学科

正 会 員 水 澤 富 作

北海道大学大学院

工学研究科北方圏環境政策工学専攻

フェロー会員 三 上 隆

1. まえがき

弾性基礎にある平板の曲げ解析では、板厚の増大に伴い、面外せん断変形の影響が無視できなくなるため、これらの影響を考慮したせん断変形理論や3次元弾性論に基づく構造解析が必要になる。また、面外荷重が作用する平板の変形状態及び卓越する変形成分（曲げ変形成分や面外せん断変形成分）とその割合を把握しておくことは重要であり、実用上意義があるものと考えられる。

著者ら¹⁾は、3次元弾性論に従う面外荷重を受ける弾性基礎にある平板の解析解を導出し、平板の変位及び応力分布特性と1次せん断変形理論（Mindlin 理論）の適用範囲の一部を明らかにしてきた。しかしながら、得られた変位分布図から平板の変形状態に対する曲げ変形成分と面外せん断変形成分の割合を読み取ることは困難であった。また、3次元弾性論に基づく解を基準とし、Mindlin 理論の適用範囲について検討してきたが、許容誤差の絶対的な定義がなく、適用範囲を正確に提示するには至らなかった。

そこで、本論文では、平板に蓄積されるひずみエネルギーと弾性基礎に蓄えられる弾性エネルギーに着目し、これを用いて、面外荷重を受ける弾性基礎にある平板の曲げ特性を評価することを試み、その基礎的な検討を行った。

2. ひずみエネルギーによる曲げ特性評価

ここでは、ひずみエネルギーを用いた面外荷重を受ける弾性基礎にある平板の曲げ特性の評価方法について述べる。図-1には、面外荷重を受ける Winkler 基礎にある平板、直交座標系及び変位の定義が示してある。ここで、 a は平板の長さ、 b は幅、 h は厚さであり、 k_1 は地盤反力係数である。3次元弾性論に基づく等質・等方な平板は微小変形かつ線形弾性であると仮定し、面外荷重 $q(x, y)$ は平板上面に作用する表面力として考慮し、Winkler 基礎は、平板下面で滑らかに完全密着しているものとする。

面外荷重を受ける Winkler 基礎にある平板に蓄えられるひずみエネルギー U は、次式で与えられる。

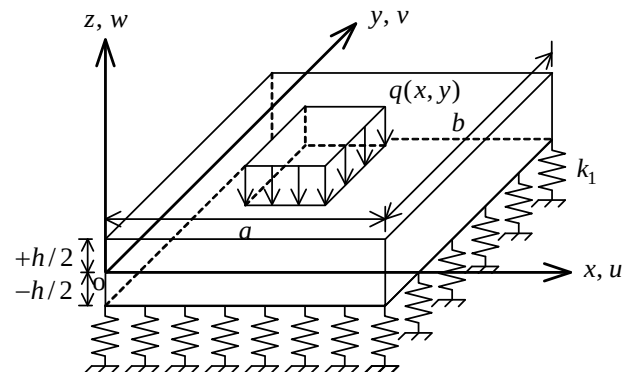


図-1 Winkler 基礎にある平板と座標系の定義

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} \right) dz dy dx + \frac{1}{2} k_1 \int_0^a \int_0^b (w|_{z=-h/2})^2 dy dx \quad (1)$$

ここで、

$$U_{ii} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ii} \varepsilon_{ii} dz dy dx \quad (i = x, y, z),$$

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{ij} \gamma_{ij} dz dy dx \quad (i, j = x, y, z),$$

$$U_{\text{Wink}} = \frac{1}{2} k_1 \int_0^a \int_0^b (w|_{z=-h/2})^2 dy dx \quad (2)$$

と置けば、次のように表すことができる。

$$U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} + U_{xy} + U_{yz} + U_{zx} + U_{\text{Wink}} \quad (3)$$

すなわち、 U_{xx} 、 U_{yy} 、 U_{xy} は曲げ変形、 U_{zz} は面外方向の伸縮変形、 U_{yz} 、 U_{zx} は面外せん断変形、 U_{Wink} は弾性基礎に関するひずみエネルギーを意味する。よって、これらのエネルギーの値を比較することで、曲げ特性を評価することができる。なお、ひずみエネルギーは、文献 1) で誘導した解析解を用い、厳密に積分して求めた。

3. 数値計算例及び考察

ここでは、面外荷重を受ける弾性基礎にある平板の各ひずみエネルギーの値に与える板厚比及び地盤反力係数の影響を整理し、曲げ特性の評価を試みる。数値計算例では、

面外荷重は平板上面に作用する等分布満載荷重 q とし、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、無次元地盤反力係数 $\Phi_1=k_1a^4/D$ を用いる。ただし、 $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$ は、平板の曲げ剛性である。

表-1 には、本論文で求めたひずみエネルギー (3-D) の精度比較が示してある。比較対象として Mindlin 理論 (MPT) と古典理論 (CPT) による級数解の結果を併記した。これより、3-D の結果の妥当性が確認できる。

図-1 には、 $\Phi_1=10^2$ である弾性基礎にある面外荷重を受ける正方形平板 ($b/a=1$) の各ひずみエネルギー成分に与える板厚比 h/a の影響が示してある。これより、 $h/a \leq 0.1$ なる平板では、面外伸縮変形成分 U_z/U 及び面外せん断変形成分 U_{yz}/U , U_{zx}/U に比して、曲げ変形成分 U_{xx}/U , U_{yy}/U , U_{xy}/U が卓越している。しかし、 h/a の増大に伴い、曲げ変形成分は減少するが、面外伸縮変形成分と面外せん断変形成分は増大し、 $h/a \geq 0.3$ なる平板では、曲げ変形成分より面外変形成分の方が卓越してくる。また、弾性基礎に蓄積されるエネルギー U_{wink} は、 $h/a \leq 0.3$ の範囲ではほぼ一定の値を取るが、 h/a の増大に伴い、減少傾向にある。

図-2 には、平板理論の考えに従い、曲げ変形成分を $U_{bend} = U_{xx} + U_{yy} + U_{xy}$ 、面外せん断変形成分を $U_{shear} = U_{yz} + U_{zx}$ 、平板理論では無視される面外伸縮変形成分を U_z と定義し、面外荷重を受ける正方形平板 ($b/a=1$) の曲げ変形成分 U_{bend} を基準とした時の面外せん断変形成分と面外伸縮変形成分のエネルギーに与える板厚比 h/a と地盤反力係数 Φ_1 の関係が示してある。ここで、 Φ_1 の値は、0, 10, 10^2 に設定した。これより、 $h/a \leq 0.05$ の範囲では、面外伸縮変形及び面外せん断変形成分の値がほぼ零であり、純粋な曲げ変形状態にあることがわかる。しかしながら、 $h/a \geq 0.2$ の範囲では、面外せん断変形成分の影響が顕著に現れており、曲げ変形成分に対し、 $h/a=0.3$ では約5割、 $h/a=0.4$ では同程度の大きさのエネルギーが生じている。また、 Φ_1 の影響は、 $h/a > 0.6$ になると現れてくる。他方、平板理論で無視される面外伸縮変形成分は、 $h/a \leq 0.2$ の範囲ではほぼ零であり、平板理論の仮定と一致する。しかし、 $h/a \geq 0.3$ になると、面外伸縮変形成分の影響が現れるとともに、 Φ_1 の影響も現れ、面外伸縮変形成分は Φ_1 の影響を大きく受けることがわかる。また、 $h/a \geq 0.5$ では、 $U_z/U_{bend} \geq 1$ となるため、平板の変形状態は、曲げ変形というよりも面外せん断変形と面外伸縮変形が支配的である。

4. まとめ

本論文では、ひずみエネルギーを用いた弾性基礎にある平板の曲げ特性評価に関する基礎的な検討を行った。その結果、ひずみエネルギーによる曲げ特性の評価は、十分

表-1 ひずみエネルギー $U_{ij} \times q^2 a^3 / E$ ($i, j = x, y, z$) の精度比較

h/a	Φ_1	Theory	$U_{xx}=U_{yy}$	U_{xy}	$U_{yz}=U_{zx}$	U_{wink}
0.01	0	3-D	3031	3233	2.741	-
		MPT	3031	3234	2.741	-
		CPT	3031	3234	-	-
	100	3-D	1933	2051	1.786	1498
		MPT	1932	2051	1.786	1499
		CPT	1933	2052	-	1497
0.1	0	3-D	3.017	3.179	0.2738	-
		MPT	3.031	3.234	0.2741	-
	100	3-D	1.894	1.986	0.1758	1.590
		MPT	1.890	2.005	0.1749	1.633

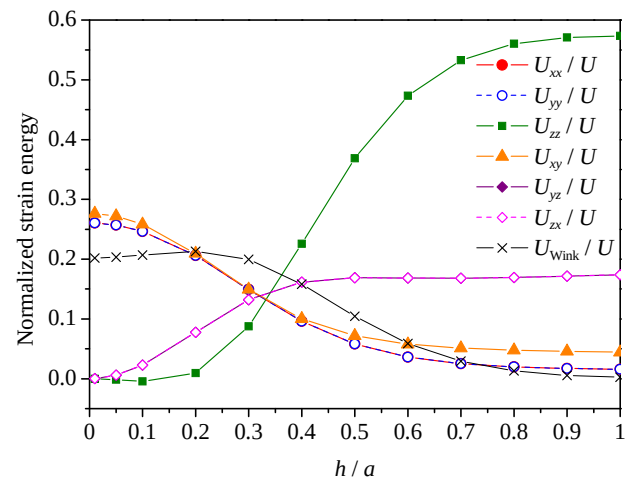


図-1 弾性基礎にある正方形平板の各ひずみエネルギー成分に与える板厚比 h/a の影響

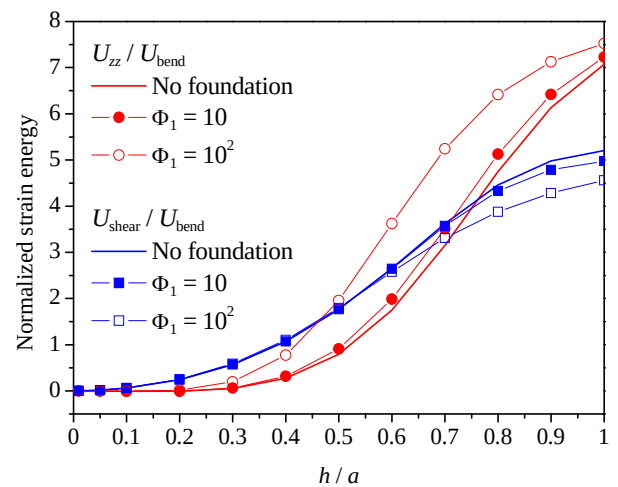


図-2 面外せん断変形成分と面外伸縮変形成分のエネルギーに与える板厚比 h/a 及び地盤反力係数 Φ_1 の関係

に可能かつ有益であると判断できる。また、本論文の結果は、平板構造解析において、平板の変形状態の理解を助け、さらに、せん断変形理論の適用範囲の検討や有限要素解析における有限要素の選定に関する指標になりうるものと考えられる。

参考文献

- 1) 名木野ら：応用力学論文集，Vol. 12, pp. 43-54, 2009.