

p-Ritz 法による外部で液体に接する中実円筒梁の自由振動解析

大分工業高等専門学校	専攻科機械・環境システム工学専攻	学生会員	○金城和久
大分工業高等専門学校	都市システム工学科	正会員	名木野晴暢
北海道大学大学院	工学研究科北方圏環境政策工学専攻	フェロー会員	三上隆

1. まえがき

橋梁の橋脚に代表されるような液体に接する円筒構造物は、地震動や波浪などの複雑な荷重を受けるため、その動力学的挙動の解明には、まず、基礎的な情報として、自由振動特性(固有円振動数と固有振動モード)、構造物と液体の動的相互作用によって生じる動水圧及び液体の影響である付加質量を把握することが不可欠になる。

著者ら¹⁾は、これまでに、液体の高さと梁の長さが等しい外部で液体に接する中実円筒梁の自由振動問題を厳密に解き、自由振動特性、動水圧及び付加質量と円筒梁の幾何形状の関係について明らかにしてきた。しかし、現実的には、液体の高さと梁の長さが異なる外部で液体に接する中実円筒梁の自由振動特性を解明する必要があるが、この問題は、液体接触領域と非接触領域の2つの基礎方程式を連続条件と境界条件の下で解かなければならないので、解式がかなり複雑になり、実用的ではないと思われる。

本論文では、定式化が容易で、計算コストが小さく、簡易的に取り扱える p-Ritz 法を用いて、液体の高さと梁の長さが異なる外部で液体に接する中実円筒梁の自由振動特性、動水圧及び付加質量係数に与える円筒梁の長さや液体の高さの影響を明らかにすることを目的としている。

2. 液体の基礎方程式と境界条件及び解析解

図-1 には、解析モデルと円筒座標系が示してある。円筒梁は下端 ($x=0$) で完全固定、上端 ($x=L$) で自由とし、液体は円筒梁の外径で接する、いわゆる外部問題を取り扱う。

液体の運動は、非粘性、非圧縮性かつ非回転とすれば、式(1) で表される速度ポテンシャル $\Phi(r, \theta, x, t)$ を仮定でき、基礎方程式は式(2) で表される。

$$\Phi(r, \theta, x, t) = \phi(r, \theta, x) i \omega e^{i \omega t} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \tag{2}$$

ここで、 $\phi(r, \theta, x)$ はポテンシャルである。また、動水圧 $p(r, \theta, x, t)$ は、線形化された Bernoulli の定理より、

$$p = -\rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{3}$$

で表される。次に、式(4)に示す境界条件及び液体と円筒梁の速度に関する連成条件の下で速度ポテンシャル Φ の解析

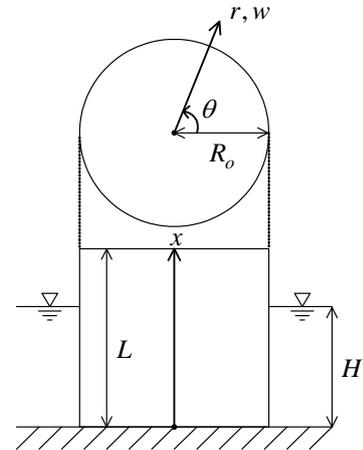


図-1 解析モデルと円筒座標系

解を求めれば、式(5)のようになる。

$$p|_{x=H} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \Phi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=R_o} = \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{r=R_o} \tag{4}$$

$$\Phi = i \omega e^{i \omega t} \cos(\theta) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2K_1(\lambda_j r/H)}{\lambda_j K_1'(\lambda_j R_o/H)} \cos(\lambda_j x/H) \times \int_0^H W(R_o, x) \cos(\lambda_j x/H) dx \tag{5}$$

ここで、 $\lambda_j = (2j+1)\pi/2$ は余弦関数の零根であり、また、 $K_1(\lambda_j r/H)$ は第2種変形 Bessel 関数、 $K_1'(\lambda_j R_o/H)$ は $r=R_o$ における $K_1(\lambda_j r/H)$ の r に関する1階微分である。

3. p-Ritz 法による構造一流体相関自由振動問題の定式化

ここでは、振幅変位 $W = w/L$ にべき級数を試行関数に採用した p-Ritz 法と式(5)の速度ポテンシャルの解析解を用いて、構造一流体相関自由振動問題を定式化する。まず、試行関数を次のように仮定する。

$$W(\xi) = \xi^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (2\xi - 1)^n \tag{6}$$

ただし、 $\xi = x/L$ である。この系の全ポテンシャルエネルギー Π は、次式で与えられる。

$$\Pi = U_{\max} - (T_{\max} + F_{\max}) \tag{7}$$

ここで、 U_{\max} と T_{\max} は、それぞれ円筒梁の最大ひずみエネルギーと最大運動エネルギーであり、 F_{\max} は、液体の最大運動エネルギーである。したがって、式(7)で未定係数 a_n で極値化すれば、振動数方程式が誘導できる。

3. 数値計算例及び考察

ここでは、液体に接する中実円筒梁の固有円振動数の収束性とその妥当性について確認する。また、液体に接する中実円筒梁の付加質量係数に与える円筒梁の長さや液体の高さの影響について検討する。数値計算例では、コンクリート構造物を想定し、円筒体の密度 $\rho_s = 2.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、液体の密度 $\rho_f = 1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ (密度比 ρ_f/ρ_s は0.435) を用いる。なお、付加質量係数 Θ は、構造物の一般化質量を1とした時の一般化された付加質量の割合、すなわち、液体の影響を表す指標であり、次のように求められる。

$$\Theta = (\Omega_0/\Omega)^2 - 1 \tag{8}$$

$$\Omega = \omega L^2 (\rho_f A / EI)^{-1/2}, \quad \Omega_0 = \omega_0 L^2 (\rho_s A / EI)^{-1/2} \tag{9}$$

ただし、 Ω は液体に接する梁の振動数パラメータ、 Ω_0 は液体に接していない梁の振動数パラメータである。

表-1には、 Ω_{1st} から Ω_{3rd} の収束性に与える L/R_o と H/L と級数項 n の関係が示してある。ここで、 H/L は0.5、 L/R_o は2と20に設定し、 n は5から10まで変化させている。これより、 Ω_{1st} から Ω_{3rd} の値は、 n の増大に伴い、一定値へ向かう安定した収束状態が示されている。

表-2には、 Ω_{1st} から Ω_{3rd} の精度比較が示してある。ここで、 L/R_o は2と20とし、 H/L は1と0.5に設定した。これより、 Ω の値は、文献1)と2)による比較解と有効数字4桁で完全に一致しており、解の妥当性が確認できる。

図-2には、付加質量係数 Θ_{1st} と Θ_{3rd} に与える L/R_o と H/L の影響が示してある。ここで、 L/R_o は2から200まで変化させ、 H/L は0.3から1まで変化させている。まず、 H/L が0.8及び1の場合には、振動次数に係わらず、 L/R_o の増大に伴い付加質量係数 Θ は増大している。しかし、 H/L が0.3及び0.5の場合の Θ_{1st} は H/L の影響が見受けられないが、 Θ_{3rd} では、 L/R_o の増大に伴い、 H/L の影響が現れている。

4. まとめ

本論文で得られた結果を纏めると、以下のとおりである。

- (1) p -Ritz法により求めた Ω_{1st} から Ω_{3rd} の値は、一様な収束状態にあり、また、高い解析精度を有する。
- (2) $H/L \leq 0.5$ の範囲では、 Θ_{1st} に与える H/L の影響がほとんど現れないが、 Θ_{3rd} では、 H/L の影響を受け、 Θ_{3rd} の値は増大する。

参考文献

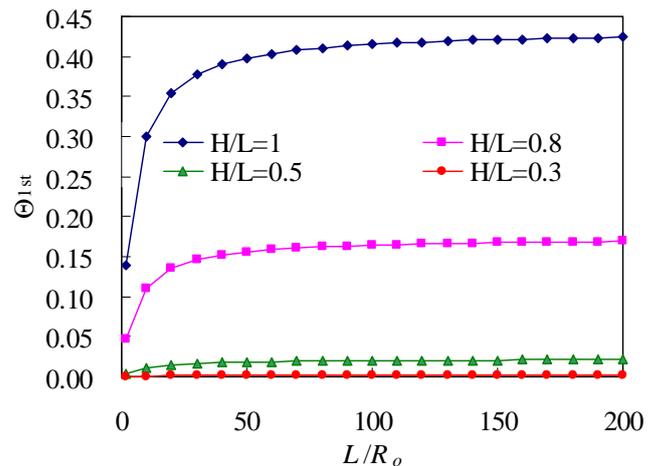
- 1) 名木野ら：平成21年度土木学会西部支部，CD-ROM 論文集 I-066, pp.131-132, 2009.
- 2) 名木野ら：土木学会第64年次学術講演会，CD-ROM 論文集 I-625, pp.1249-1250, 2009.

表-1 Ω の収束性に与える L/R_o と級数項 n の関係

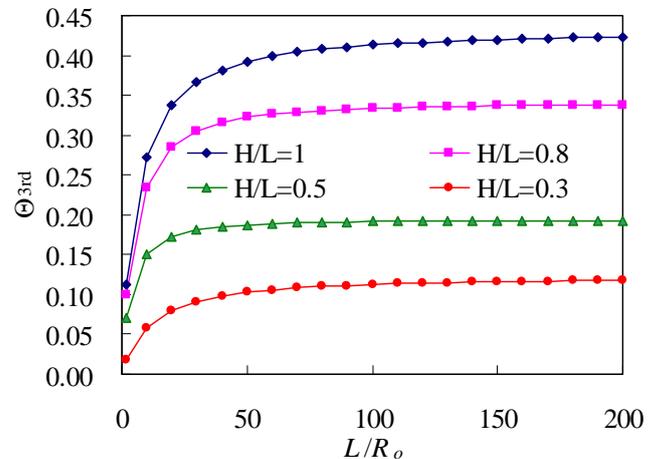
n	$L/R_o = 2$			$L/R_o = 20$		
	Ω_{1st}	Ω_{2nd}	Ω_{3rd}	Ω_{1st}	Ω_{2nd}	Ω_{3rd}
5	3.509	21.56	61.04	3.490	20.58	58.30
6	3.509	21.56	59.65	3.490	20.58	56.98
7	3.509	21.56	59.65	3.490	20.58	56.98
8	3.509	21.56	59.63	3.490	20.58	56.96
9	3.509	21.56	59.63	3.490	20.58	56.96
10	3.509	21.56	59.63	3.490	20.58	56.96

表-2 Ω の精度比較

L/R_o	H/L	Method	Ω_{1st}	Ω_{2nd}	Ω_{3rd}
2	1	p -Ritz	3.295	20.46	58.50
		Ref.1.	3.295	20.46	58.50
	0.5	p -Ritz	3.509	21.56	59.63
		Ref.2.	3.509	21.56	59.63
20	1	p -Ritz	3.021	18.93	53.36
		Ref.1.	3.021	18.93	53.36
	0.5	p -Ritz	3.490	20.58	56.96
		Ref.2.	3.490	20.58	56.96



(a) 1st mode



(b) 3rd mode

図-2 Θ_{1st} と Θ_{3rd} に与える L/R_o と H/L の影響