

観測信号スプライン補間による近接固有値を有する2自由度系の振動特性推定法

長崎大学工学部 学生会員 ○原田将弘

長崎大学工学部 フェロー 岡林隆敏

長崎大学大学院 学生会員 張 葉絲

長崎大学博士 学生会員 Md.Rajab ALI

1. はじめに

近年の橋梁の景観や軽量化を考慮した設計により吊形式の橋梁が増加傾向にある。このような橋梁は振動実験においてうなりの発生が確認されている¹⁾。これは近接した複数の固有振動数が存在することに起因し、うなりの発生下においては実現理論を用いた振動特性推定手法が効果的である²⁾。本研究では、実現理論を用いた振動特性推定精度向上のため、スプライン補間の有効性を検証した。

2. 近接固有値を有する2自由度系のモデル

図-1のような2つの質点間をばね k_{12} で結合した2自由度系構造モデルに外力が作用する場合、運動方程式は次式で与えられる。

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + c_1 \dot{x}_1(t) + k_1 x_1(t) + k_{12}(x_1(t) - x_2(t)) = f_1(t) \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + c_2 \dot{x}_2(t) + k_2 x_2(t) - k_{12}(x_1(t) - x_2(t)) = f_2(t) \quad (2)$$

ここで、 $m_1 = m_2 = m$ 、 $k_1 = k_2 = k$ 、 $k_{12} = \gamma k$ とし、非減衰振動を考えると、系の固有円振動数は $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ 、 $\omega_2 = \sqrt{k(1+2\gamma)/m}$ で与えられる。本研究では、 γ の値を変化させ、質点1、2に近接した固有振動数を与えることにより、うなりを発生させた。なお、 $m = 1.0\text{tf}$ 、 $k = 4.028\text{tf/m}$ 、 $h = 0.005$ 、 $f_1 = 1.0\text{Hz}$ とし、質点2の振動数が $f_2 = 1.10\text{Hz}$ (case1)、 1.02Hz (case2)となるように γ を変化させた。

3. 確率実現理論

振動特性推定に実現理論のERA/DC法を用いた。以下に詳細を示す。

計測データより、データ相関行列 $\mathbf{R}_R(k-1) = \mathbf{H}(k-1)\mathbf{H}(0)^T = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{Q}_\beta$ を作成する。ここで、 $\mathbf{P}_\alpha$ は可観測行列、 $\mathbf{Q}_\beta$ は可制御行列である。このとき、 $k=1$ のとき特異値分解を、 $k=2$ のときハンケル行列を作成すると次式を得る。

$$\mathbf{H}_R(0) = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T = \mathbf{U} \mathbf{S}^{1/2} \mathbf{S}^{1/2} \mathbf{V}^T = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{Q}_\beta \quad \mathbf{H}_R(1) = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A} \mathbf{Q}_\beta = \mathbf{U} \mathbf{S}^{1/2} \mathbf{A} \mathbf{S}^{1/2} \mathbf{V}^T \quad (3)$$

上式より、係数行列は次式で定義される。

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}_n^{-1/2} \mathbf{U}_n^T \mathbf{H}_R(1) \mathbf{V}_n \mathbf{S}_n^{-1/2} \quad \mathbf{C} = \mathbf{E}_m^T \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n^{1/2} \quad (4)$$

また、係数行列 $\mathbf{A}$ の固有値の実数部分 X_{Re} と虚数部分 X_{Im} から、固有円振動数 ω_k および減衰定数 h_k が次式より得られ、係数行列 $\mathbf{C}$ より振動モードが計算できる。

$$h_k \omega_k = -(1/\Delta) \log \sqrt{(X_{\text{Re}}^k)^2 + (X_{\text{Im}}^k)^2} \quad (5)$$

$$\omega_k \sqrt{1-h_k^2} = (1/\Delta) \tan^{-1}(X_{\text{Im}}^k / X_{\text{Re}}^k) \quad (6)$$

4. 3次スプライン補間

3次スプライン補間は、点 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の関数値 $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ と両端における微分係数 $f'(x_1)$ と $f'(x_n)$ を与えたとき、これらの値と一致するような補間式

$$s(x) = f(x_i) + c_{i1}(x - x_i) + c_{i2}(x - x_i)^2 + c_{i3}(x - x_i)^3 \quad (7)$$

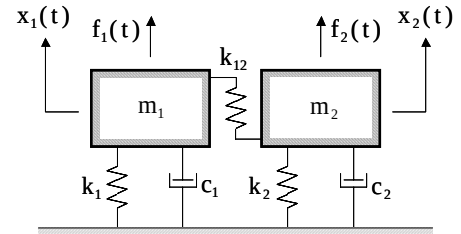


図-1 2自由度系構造モデル

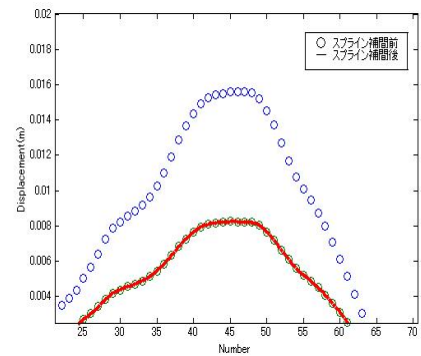


図-2 スプライン補間

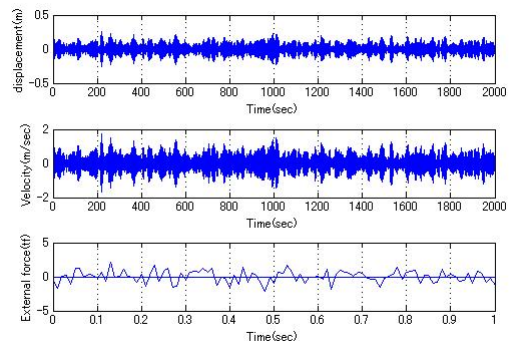


図-3 常時微動外力

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad i=1,2,\dots,n-1$$

の係数 c_{i1}, c_{i2}, c_{i3} を求める方法である. 図 - 2 に常時微動外力を 3 次スプライン補間したものの一部を示す.

5. 常時微動による振動特性推定値比較

(1) 応答計算

図 - 1 の構造モデルに図-3 に示す常時微動外力が作用した場合の応答計算を行った. 常時微動外力は最大加振力 2.5tf 程度の白色雑音とし, 時間刻みを $dt=0.01\text{sec}$, 計算時間を 2000sec とした. 図 - 3 は上から, $f_2=1.10(\text{case1})$ の場合の質点 1 の変位応答, 速度応答, 外力変化を示している.

(2) 振動特性推定結果

図 - 4, 5 に $f_2=1.10\text{Hz}(\text{case1})$ における, スプライン補間前後の推定振動数および推定振動数のヒストグラムを示す. 同様に図 - 6, 7 には case2 における推定値とヒストグラムを示す.

(3) 補間前後の振動特性推定結果の比較

スプライン補間では, 常時微動を時間刻み $dt=0.003$ とし, 3 次スプライン補間を用いてリサンプリングした. 表 - 1, 2 はスプライン補間前後の振動数推定結果の誤差を示している. case1 では図 - 4, 5 から補間前後で顕著な差異は見られないが, 表 - 1, 2 からは 2 質点目の振動数推定結果の変動係数が補間後に小さくなっていることがわかる. case2 では図 - 6, 7 を比較するとスプライン補間前後でヒストグラムのばらつきが低減していることがわかる. 表 - 1, 2 からは 2 質点目での振動数推定結果の変動係数がスプライン補間前後で低減していることがわかる. 以上の比較から, スプライン補間により振動数推定精度は向上したといえる.

また, 各 case における減衰定数推定結果のばらつきもスプライン補間後には低減された. 図表は省略する.

6. まとめ

本研究では, 近接固有値を有する 2 自由度系の実現理論を用いた振動特性推定精度の向上のため, 入力外力をスプライン補間し, その効果を検証した. 推定結果の比較からスプライン補間処理により振動数, 減衰定数の推定精度は向上していることが明らかになった.

【参考文献】

- 岡林隆敏他: 近接固有値を有する構造物の振動特性推定, 土木学会論文集 No.633/I-49, pp93~102, 1999
- 下妻達也他: 近接固有値を有する構造物の実現理論による振動特性推定, 土木学会西部支部研究発表会講演概要集 I-63, pp125~126, 2009

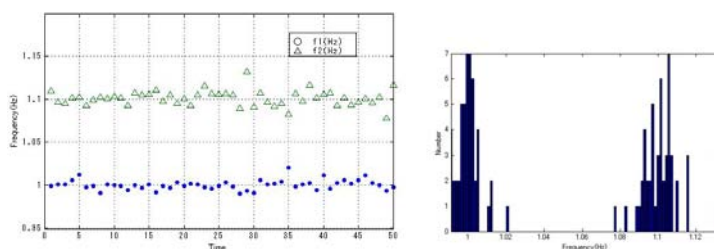


図 - 4 振動数推定結果とヒストグラム(case1 補間前)

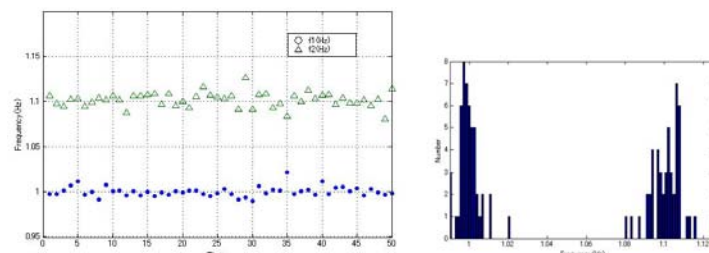


図 - 5 振動数推定結果とヒストグラム(case1 補間後)

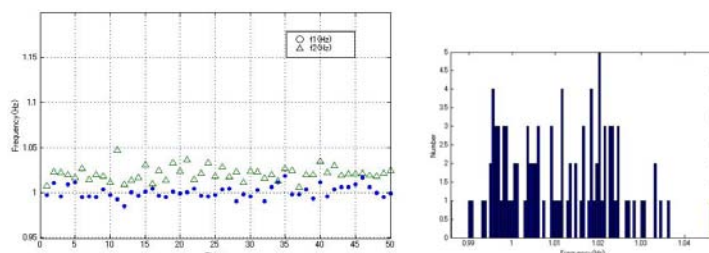


図 - 6 振動数推定結果とヒストグラム(case2 補間前)

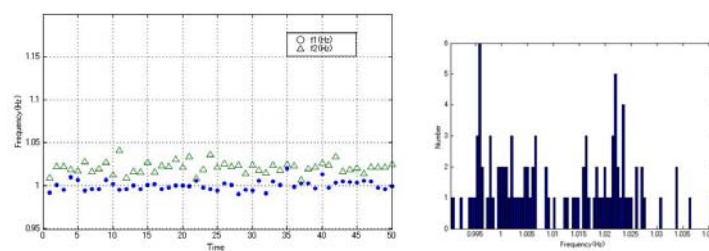


図 - 7 振動数推定結果とヒストグラム(case2 補間後)

表 - 1 推定結果の誤差(補間前)

		設定値(Hz)	平均値(Hz)	変動係数(%)
case1	f_1	1.000	1.001	0.571
	f_2	1.100	1.102	0.812
case2	f_1	1.000	1.001	0.675
	f_2	1.020	1.021	0.766

表 - 2 推定結果の誤差(補間後)

		設定値(Hz)	平均値(Hz)	変動係数(%)
case1	f_1	1.000	1.000	0.541
	f_2	1.100	1.102	0.732
case2	f_1	1.000	1.001	0.568
	f_2	1.020	1.021	0.678