

空間積分型波動方程式に基づく数値解析手法の構築

鹿児島大学大学院理工学研究科 学生会員 松原健悟
鹿児島大学工学部 正会員 柿沼太郎

1. 序 論

現象を記述するための場の支配方程式は、与えられた条件や仮定のもとで導かれる。こうした条件には、自然によって形成される地形や引き起こされる外力、または、人工的に造られた構造物に起因する現象等、様々なものが存在する。変分法は、これらの諸条件を採り入れながら、場の支配方程式を導くための一手法である。本研究では、変分法を用いて、水の波を記述するための基礎方程式系を導出する。

近年、偏微分方程式に基づく数値解析手法として、差分法 (FDM)、有限要素法 (FEM)、有限体積法 (FVM)、そして、境界要素法 (BEM) といった方法が駆使され、更に、より精度の高い解を得るための工夫や流体運動特有の乱流等の条件を盛り込んで解析を行なう手法が編み出され、実用に供されている。ところが、数値解析を実施するための差分格子や有限要素の生成及び節点結合情報の作成といった作業の必要性は、計算対象の精緻化・複雑化につれて深刻な問題となっている。このような問題を解消するため、本研究では、変分原理を用いることにより、支配方程式を対象空間にわたって解析的に積分した形に誘導していく。その結果、空間の要素分割や、流体粒子の追跡が不必要となる。このとき、場の方程式系は、Euler 的な見方と Lagrange 的な見方の両者を包含している。そして、ここで提案する手法によって、数値解析のプリ・プロセス及びポスト・プロセスが簡素化され、計算に必要な作業が大いに軽減されることが期待される。

ここでは、極浅水域における波動を解析することを目的とし、対象空間にわたって積分された非線形浅水方程式系を導出する。そして、本基礎方程式系に基づく数値解析手法について考察する。

2. 汎関数の設定

非粘性・非圧縮性流体の非回転運動を対象とする。密度が一様な流体の上面及び下面の位置をそれぞれ $z = \zeta(\mathbf{x}, t)$ 及び $z = b(\mathbf{x}, t) < \zeta$ とし、両者が共に水平方向座標 $\mathbf{x}$ の 1 価関数であるとする。大気圧を 0 とし、また、表面張力については、重力の効果に比べて無視できるものとする。

対象領域の $x-y$ 平面への正射影である平面 A 及び底面位置 b が既知であるとする。求める未知変数は、速度ポテンシャル $\phi(\mathbf{x}, z, t)$ 及び水面変動 ζ となる。このとき、流体運動に対する作用 $L[\phi, \zeta]$ を次式のような汎関数とする (Luke, 1967)。

$$L[\zeta, \phi] = \int_{t_1}^{t_2} \iint_A \int_b^\zeta \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + g z \right\} dz dA dt \quad (1)$$

ここで、 g は、重力加速度であり、 t_1 及び t_2 は、それぞれ、対象時間の開始時刻及び終了時刻を意味する。式(1) の汎関数を用いることにより、水面及び底面における境界条件が自動的に満たされることになる。

3. 空間積分型非線形浅水方程式系の導出

右図に示す $x-z$ 面内の領域を対象とする。簡単のために、底面が水平であるとする。そして、shallow water の仮定のもとに $\phi(\mathbf{x}, z, t) = f(\mathbf{x}, t)$ とする。

速度ポテンシャル $f(\mathbf{x}, t)$ 及び水面変動 $\zeta(\mathbf{x}, t)$ をそれぞれ N 個の水平分布関数 $X_{\alpha^f}^f(\mathbf{x})$ 及び $X_{\alpha^\zeta}^\zeta(\mathbf{x})$ の重み付き和として次式のように表す。

$$f(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha^f=1}^{N^f} \{ X_{\alpha^f}^f(\mathbf{x}) \cdot \tau_{\alpha^f}^f(t) \} \equiv X_{\alpha^f}^f(\mathbf{x}) \cdot \tau_{\alpha^f}^f(t) \quad (2)$$

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha^\zeta=1}^{N^\zeta} \{ X_{\alpha^\zeta}^\zeta(\mathbf{x}) \cdot \tau_{\alpha^\zeta}^\zeta(t) \} \equiv X_{\alpha^\zeta}^\zeta(\mathbf{x}) \cdot \tau_{\alpha^\zeta}^\zeta(t) \quad (3)$$

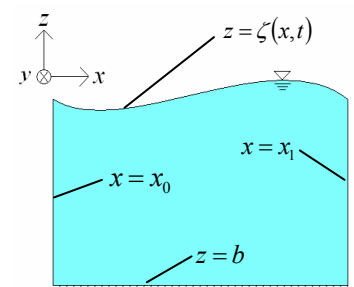


図 流体の対象領域

式(2) 及び (3) を式(1) に代入して解析的に積分を行なうと、汎関数が次式のように変形される。

$$L[\phi, \zeta] = L[f, \zeta] = L[\tau^f, \tau^\zeta] = \int_{t_0}^{t_1} \xi[\tau^f, \tau^\zeta] dt,$$

$$\xi[\tau^f, \tau^\zeta] = -bA_{\alpha^f} \frac{\partial \tau_{\alpha^f}^f}{\partial t} + B_{\alpha^f \alpha^\zeta} \frac{\partial \tau_{\alpha^f}^f}{\partial t} \tau_{\alpha^\zeta}^\zeta + \frac{g}{2} C_{\alpha^\zeta \beta^\zeta} \tau_{\alpha^\zeta}^\zeta \tau_{\beta^\zeta}^\zeta - \frac{b}{2} D_{\alpha^f \beta^f} \tau_{\alpha^f}^f \tau_{\beta^f}^f + \frac{1}{2} E_{\alpha^f \beta^f \alpha^\zeta} \tau_{\alpha^f}^f \tau_{\beta^f}^f \tau_{\alpha^\zeta}^\zeta - \frac{g}{2} b^2 (x_2 - x_1) \quad (4)$$

$$A_\alpha = \int_{x_0}^{x_1} X_\alpha^f dx, \quad B_{\alpha\beta} = \int_{x_0}^{x_1} X_\alpha^f X_\beta^\zeta dx, \quad C_{\alpha\beta} = \int_{x_0}^{x_1} X_\alpha^\zeta X_\beta^\zeta dx, \quad D_{\alpha\beta} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial X_\alpha^f}{\partial x} \frac{\partial X_\beta^\zeta}{\partial x} dx, \quad E_{\alpha\beta\gamma} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial X_\alpha^f}{\partial x} \frac{\partial X_\beta^f}{\partial x} X_\gamma^\zeta dx \quad (5)$$

ところで、この場合の Euler-Lagrange 方程式系は、次式である。

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau_{\alpha^f}^f} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \xi}{\partial (\partial \tau_{\alpha^f}^f / \partial t)} \right] \quad (6)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau_{\alpha^\zeta}^\zeta} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \xi}{\partial (\partial \tau_{\alpha^\zeta}^\zeta / \partial t)} \right] \quad (7)$$

従って、式(6) 及び (7) より、空間積分型非線形浅水方程式系が次式のように得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (B_{\alpha^f \alpha^\zeta} \tau_{\alpha^\zeta}^\zeta - bA_{\alpha^f}) - E_{\alpha^f \beta^f \alpha^\zeta} \tau_{\beta^f}^f \tau_{\alpha^\zeta}^\zeta + bD_{\alpha^f \beta^f} \tau_{\beta^f}^f = 0 \quad (8)$$

$$B_{\alpha^f \alpha^\zeta} \frac{\partial \tau_{\alpha^f}^f}{\partial t} + \frac{1}{2} E_{\alpha^f \beta^f \alpha^\zeta} \tau_{\alpha^f}^f \tau_{\beta^f}^f + gC_{\alpha^\zeta \beta^\zeta} \tau_{\beta^\zeta}^\zeta = 0 \quad (9)$$

4. 分布関数の設定

式(2) 及び (3) の $X_{\alpha^f}^f(x)$ 及び $X_{\alpha^\zeta}^\zeta(x)$ として、次式のような x に関するべき関数を採用する。

$$f(x, t) = m_\alpha \cdot x^\alpha \quad \text{and} \quad \zeta(x, t) = n_\beta \cdot x^\beta \quad (10)$$

すると、式(8) 及び (9) が、具体的に次式のように書き換えられる。

$$\frac{1}{\alpha + \beta + 1} \frac{\partial n_\beta}{\partial t} (x_2^{\alpha+\beta+1} - x_1^{\alpha+\beta+1}) = \frac{\alpha\gamma}{\alpha + \beta + \gamma - 1} m_\gamma n_\beta (x_2^{\alpha+\beta+\gamma-1} - x_1^{\alpha+\beta+\gamma-1}) \quad (11)$$

$$\frac{1}{\alpha + \beta + 1} \frac{\partial m_\alpha}{\partial t} (x_2^{\alpha+\beta+1} - x_1^{\alpha+\beta+1}) = - \left\{ \frac{1}{2} \frac{\alpha\gamma}{\alpha + \beta + \gamma - 1} m_\alpha m_\gamma (x_2^{\alpha+\beta+\gamma-1} - x_1^{\alpha+\beta+\gamma-1}) + g \frac{1}{\beta + \delta + 1} n_\delta (x_2^{\beta+\delta+1} - x_1^{\beta+\delta+1}) \right\} \quad (12)$$

ここで、 α , β , γ 及び δ のそれぞれに対して、積の総和規約が適用されている。

5. 数値解析手法

数値解析では、陰解法を用いて式(11) 及び (12) を時間発展的に解く。すなわち、速度ポテンシャル及び水面変動の重み係数 m_α 及び n_β の初期値を与えてから、 N 個からなる式(12) より、次の時間ステップの m_α を Gauss の消去法等を用いて求める。そして、得られた m_α を用いて、 N 個からなる式(11) より、次の時間ステップの n_β を求める。これを計算対象時間にわたって繰り返す。なお、水平方向の境界条件が汎関数の中に組み込まれていないため、水平方向の境界条件を数値解析時に与えるか、もしくは、付加条件として基礎方程式系に付与しておく必要がある。

6. 結 論

変分原理を用いることにより、対象空間にわたって積分された非線形浅水方程式系を導出した。そして、本方程式系を基礎方程式系とする数値解析手法について考察した。今後、本数値解析手法を適用して実際に数値解析を行ない、従来の差分格子を用いる手法やその結果との比較により、本手法の検討を進めたい。

参考文献: Luke, J. C. (1967): A variational principle for a fluid with a free surface, J. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 395-397.