

Pasternak 基礎にある直方弾性体の板厚方向に厳密な級数解の誘導と Reissner-Mindlin 平板の適用限界について

大分工業高等専門学校 都市システム工学科

大分工業高等専門学校 都市システム工学科

足利工業大学 都市環境工学科

大同工業大学 都市環境デザイン学科

北海道大学大学院 工学研究科北方圏環境政策工学専攻

学 生 会 員 ○多田 裕治

正 会 員 名木野 晴暢

正 会 員 末武 義崇

正 会 員 水澤 富作

フェロー会員 三上 隆

1. まえがき

基礎構造、スラブ軌道や舗装道路などは、地盤上にある平板の問題として取り扱われるため、構造設計においては、まず、基礎的な情報として、地盤の影響を考慮した平板の静力学的特性(変位や応力分布)を把握することが、必要不可欠になる。

昨年、野中ら¹⁾は、初めて、3次元弾性論に基づく Winkler 基礎にある平板の曲げ問題の級数解を誘導し、弾性学的に正確な静力学的特性の一部を明らかにしている。しかしながら、Winkler 基礎は、最も簡易的に構造物と弾性地盤の相互作用を考慮した弾性基礎モデルであるが、Winkler 基礎の個々の独立性や実際の挙動との矛盾が生じることが問題となる。

本論文では、(1) Pasternak 基礎にある直方弾性体(以下、平板)の板厚方向に厳密な級数解を誘導すること、(2) 実務設計で使用される簡易的かつ簡便な1次元せん断変形理論である Reissner-Mindlin 平板理論との理論比較を行い、平板理論の適用限界を明らかにすること、の2点を目的としている。

2. 基礎方程式および境界条件

図-1 には、Pasternak 基礎上の平板、座標系および変位の定義が示してある。Pasternak 基礎は、面外せん断変形にのみ抵抗するせん断層 k_2 を導入し、個々の Winkler 基礎 k_1 の独立性を奪った弾性基礎モデルである。ここで、3次元弾性論に基づく等質かつ等方的な平板は、微小変形かつ線形弾性であり、平板の上面($z = +h/2$)で等分布満載荷重 q を受け、平板の下面($z = -h/2$)で Pasternak 基礎と滑らかに完全密着しているものとする。

直方弾性体の基礎方程式は、次式で与えられる¹⁾。

$$\nabla^2 \Theta + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} = 0 \quad (\Theta = u, v, w). \quad (1)$$

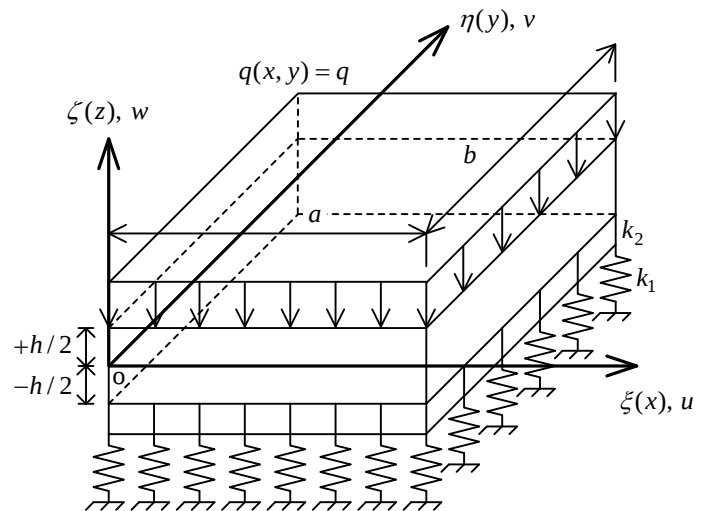


図-1 Pasternak 基礎上の平板、座標系および変位方向

ここで、 ∇^2 は Laplacian, e は体積ひずみであり、 ν はポアソン比である。

また、板上下面での境界条件は、次式で与えられる。

$$\sigma_z = k_1 w - k_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \text{ at } z = -h/2. \quad (2)$$

$$\sigma_z = -q; \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \text{ at } z = +h/2. \quad (3)$$

ただし、 q は等分布荷重強度であり、 k_1 と k_2 は、それぞれ、Winkler 基礎とせん断層の地盤反力係数である。

3. 板厚方向に厳密な級数解の誘導

次のような無次元座標系と無次元量を導入する。

$$\xi(x) = x/a; \eta(y) = y/b; \zeta(z) = z/h. \quad (4)$$

$$U = u/h; V = v/h; W = w/h. \quad (5)$$

ここで、 U, V および W は、無次元変位である。

したがって、文献1)と同様にして、無次元変位を未知関数 $U_{mn}(\zeta), V_{mn}(\zeta), W_{mn}(\zeta)$ を含む2重 Fourier 級数で仮定し¹⁾、これを式(1)に代入して、式(2)および式(3)の境界条件下で解けば、未知関数 $U_{mn}(\zeta), V_{mn}(\zeta), W_{mn}(\zeta)$ が求められる。この詳細については、紙面の都合上割愛する。

4. 数値計算例および考察

ここでは, Pasternak 基礎上にある平板の解(変位および応力成分)と級数の展開項数 r および解の妥当性について検討し, 解析に必要な級数の展開項数 r について検討する. なお, 数値計算例では, 正方形平板($b/a = 1$)およびポアソン比 $\nu = 0.25$ とし, 次式で定義される無次元地盤反力係数を用いる.

$$\Phi_1 = k_1 a^4 / D, \Phi_2 = k_2 a^2 / D \quad (6)$$

ただし, $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ は, 平板の曲げ剛性である.

4.1 等分布荷重 q の精度と級数項数の関係

本論文で誘導した級数解は, 無限級数によって表現されるが, 数値計算の際には, 無限大を取り扱うことができないため, 何らかの根拠に基づき有限の r で解を評価しなければならない. また, 等分布荷重 q も無限級数で表されるため, 実際の荷重を再現するために必要な r を把握する必要がある. ここで, 等分布荷重 q は, $\xi = 0, 1$ において不連続点を有するため, Gibbs の現象が生じ, r を大きくしても実際の荷重とは完全に一致しない. そこで, 等分布荷重の合力 Q を次式に基づき計算し, これと r との関係を調べた.

$$Q = ab \int_0^1 \int_0^1 q d\eta d\xi \quad (7)$$

図-2 には, 等分布荷重の合力 Q と級数の展開項数 r の関係が示してある. これより, r を増大させれば, Q の値は 1(Exact)に漸近している. また, r を 50 以上に取れば, Exact との誤差が 1 %以下になることを確認している. したがって, r を 50 以上に採用すれば, 実際の荷重を近似していると判断できる.

4.2 変位および応力の収束状態と精度比較

表-1 には, Pasternak 基礎上にある平板の面外変位 w と応力 σ_x の収束性に与える級数の展開項数 r の影響と精度比較が示してある. ここで, 板厚比 h/a は, 0.005(薄肉)と 0.5(厚肉)に設定して, r は, 3.1 節の結果を考慮し, 50 から 160 まで変化させている. また, 解の妥当性を確認するための比較解として, 3次元弾性論に基づく解析結果が見当たらないため, Han・Liew²⁾の Reissner-Mindlin 平板理論に基づく数値解と比較を行った. なお, 実用上十分な精度を確保することを念頭に置き, 変位は有効数字 4 桁で, 応力は有効数字 3 桁で整理した. これより, w と σ_x の値は, h/a

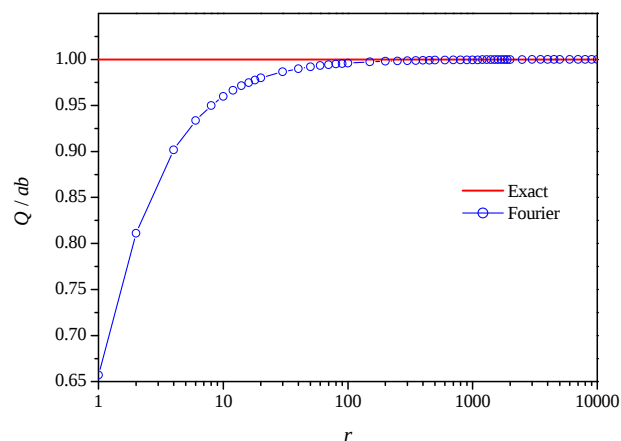


図-2 合力 Q と級数の展開項数 r の関係

表-1 Pasternak 基礎上にある平板の面外変位 w と応力 σ_x の収束性に与える級数の展開項数 r の影響と精度比較: $\Phi_1 = 200, \Phi_2 = 20, \xi = \eta = 0.5$

h/a	r	$\zeta = 0$	$\zeta = -0.5$	$\zeta = 0.5$
		$wD / qa^4 \dagger$	σ_x / q	σ_x / q
0.005	50	-1.568	3871	-3871
	100	-1.568	3871	-3871
	150	-1.568	3871	-3871
	Ref.2	-1.568	3871	-3871
0.5	50	-3.840	0.315	-0.709
	100	-3.840	0.315	-0.714
	150	-3.840	0.315	-0.715
	160	-3.840	0.315	-0.715

$\dagger \times 10^{-3}$

の値に関わらず, r の増大にともない, 一定値へ収束している. また, $h/a = 0.005$ の収束値は, Han・Liew²⁾の数値解²⁾と良く一致しており, 解の妥当性が確認できる. 以上より, $0.005 \leq h/a \leq 0.5$ である平板では, r を 100 程度に取れば, 妥当性のある収束解が得られる.

5. まとめ

本論文では, (1) 級数の展開項数 r を 50 以上に取れば, 実際の荷重を十分に近似している, (2) 変位と応力成分は, 級数の展開項数 r の増大にともない一定値へ収束し, 解の妥当性は十分にある, の 2 点を明らかにした. なお, Reissner-Mindlin 平板理論との理論比較については, 当日報告する.

参考文献

- 1) 野中ら: 土木学会西部支部, I-022, pp.43-44, 2008.
- 2) Han and Liew: *Int. J. Mech. Sci.*, **39**, pp.977-989, 1997.