近接固有値を有する構造系の実現理論による振動特性推定

長崎大学大学院　学生会員　○下妻達也　長崎大学工学部　フェロー　岡林隆敏
長崎大学工学部　学生会員　張　葉絲　日本構造橋梁研究所　正会員　小松正貴

１．はじめに

近年, 橋梁の軽量化や景観を考慮した設計により吊形式の橋梁が増加の傾向にあるが, このような橋梁の振動実験においてうなりの発生が確認されている．これは, 近接した複数の固有振動数が存在する場合に発生し, 同現象が発生すると従来の慣用的な手法では振動特性推定を行うことが困難である．これに対し，著者等はモード解析法を適用した非線形最小二乗法による振動特性推定手法[1)]を提案しているが, この手法では構造モデルの関数の初期値を設定する必要があった．そこで本研究では，実現理論を用いた振動特性推定手法に着目し，近接固有値を有する構造物への有効性を検証した.

２．近接固有値を有する２自由度系のモデル

図-１のような 2 つの質点間をばねk_{12}で結合した２自由度系構造物モデルに外力が作用する場合，運動方程式は次式で与えられる.

$$m_1\ddot{x}_1(t)+c_1\dot{x}_1(t)+k_1x_1(t)+k_{12}(x_1(t)-x_2(t))=f_1(t) \quad (1)$$

$$m_2\ddot{x}_2(t)+c_2\dot{x}_2(t)+k_2x_2(t)-k_{12}(x_1(t)-x_2(t))=f_2(t) \quad (2)$$

ここで，$m_1=m_2=m$，$k_1=k_2=k$，$k_{12}=\gamma k$とし，非減衰振動を考えると，系の固有円振動数は$\omega_1=\sqrt{k/m}$, $\omega_2=\sqrt{k(1+2\gamma)/m}$で与えられる．本研究では，$\gamma$の値を変化させ，質点１，２に近接した固有振動数を与えることにより，うなりを発生させた．なお，$m=1.0\mathrm{tf}$，$k=4.028\mathrm{tf/m}$，$h=0.005$，$f_1=1.0\mathrm{Hz}$とし，質点 2 の振動数が$f_2=1.10\mathrm{Hz}, 1.02\mathrm{Hz}$となるように$\gamma$を変化させた.

３．確率実現理論

振動特性推定に実現理論の ERA/DC 法を用いた．以下に詳細を示す.

計測データより，データ相関行列$\mathbf{R}_R(k-1)=\mathbf{H}(k-1)\mathbf{H}(0)^T=\mathbf{P}_\alpha\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{Q}_c$を作成する．ここで，$\mathbf{P}_\alpha$は可観測行列，$\mathbf{Q}_\beta$は可制御行列である．このとき，$k=1,2$の場合の特異値分解を行うと次式を得る.

$$\mathbf{H}_R(0)=\mathbf{USV}^T=\mathbf{US}^{1/2}\mathbf{S}^{1/2}\mathbf{V}^T=\mathbf{P}_\alpha\mathbf{Q}_\beta \qquad \mathbf{H}_R(1)=\mathbf{P}_\alpha\mathbf{AQ}_\eta=\mathbf{US}^{1/2}\mathbf{AS}^{1/2}\mathbf{V}^T \quad (3)$$

上式より，係数行列は次式で定義される.

$$\mathbf{A}=\mathbf{S}_n^{-1/2}\mathbf{U}_n^T\mathbf{H}_R(1)\mathbf{V}_n\mathbf{S}_n^{-1/2} \qquad \mathbf{C}=\mathbf{E}_m^T\mathbf{U}_n\mathbf{S}_n^{1/2} \quad (4)$$

また, 係数行列$\mathbf{A}$の固有値の実数部分X_{Re}と虚数部分X_{Im}から, 固有円振動数ω_kおよび減衰定数h_kが次式より得られ，係数行列$\mathbf{C}$より振動モードが計算できる.

$$h_k\omega_k=-(1/\Delta)\log\sqrt{(X_{Re}^k)^2+(X_{Im}^k)^2} \qquad \omega_k\sqrt{1-h_k^2}=(1/\Delta)\tan^{-1}(X_{Im}^k/X_{Re}^k) \quad (5)$$

４．自由振動による振動特性推定

（１）衝撃加振シミュレーション

構造モデルは図-１に示すモデルとし，外力は図-２に示すような衝撃荷重(最大加振力 0.01tf，作用時間 0.5sec)である．時間刻みは dt = 0.01sec とし，計算時間を 80sec としている．図-３は$f_2=1.10\mathrm{Hz}$ (case1)，$f_2=1.02\mathrm{Hz}$ (case2)の場合の質点１の変位応答について示したものである.

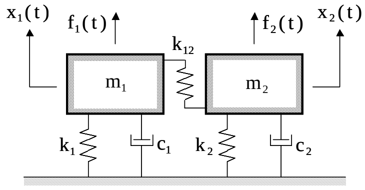

図-１　２自由度系構造モデル

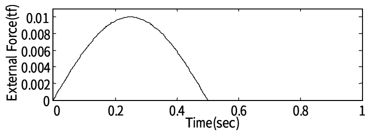

図-２　衝撃荷重

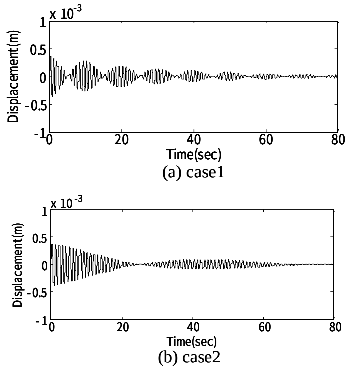

図-３　変位応答

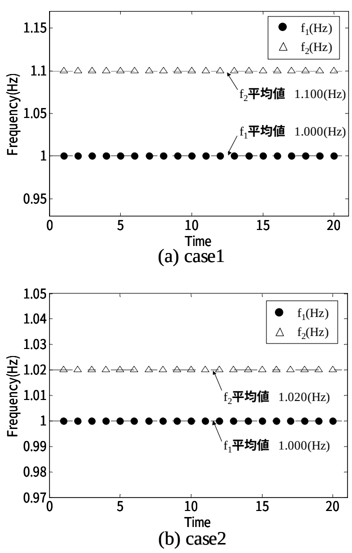

図-４　振動数推定結果

表-１　推定結果の誤差

		設定値 (Hz)	平均値 (Hz)	変動係数 (%)
case1	f_1	1.000	1.000	0
	f_2	1.100	1.100	0
case2	f_1	1.000	1.000	0
	f_2	1.020	1.020	0

（２）振動特性推定結果

図-４は各ケースの振動数推定結果を示したものである．速度応答の 3 秒間のデータを一回区として計 20 回の推定を行っている．図より，両ケースともばらつきが見られず，極めて高い精度で振動数を推定することができている．また，表-１は推定結果の平均値と変動係数を示したものであるが，振動数の平均値は設定値と完全に一致しており，変動係数も 0% となった．従って，構造物の自由振動波形からは，振動特性を高い精度で推定できることが確認できた．

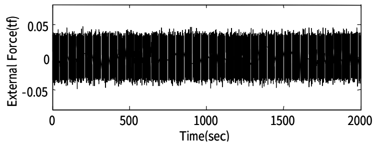

図-５ 常時微動外力

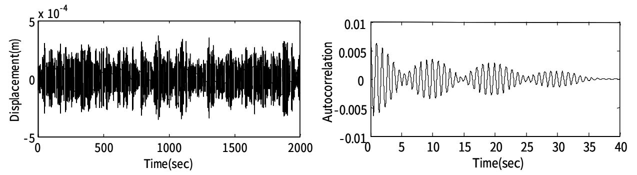

図-６ 変位応答と自己相関関数(case1)

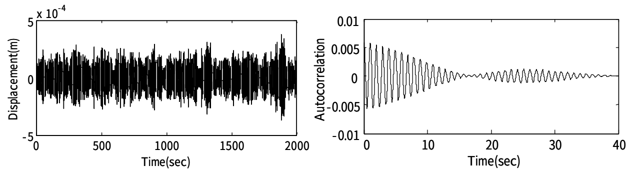

図-７ 変位応答と自己相関関数(case2)

５．常時微動による振動特性推定

（１）常時微動シミュレーション

図-１の構造モデルに図-５に示す常時微動外力が作用した場合のシミュレーションを行った．常時微動外力は最大加振力が 0.05tf 程度の白色雑音とし，時間刻みを $dt = 0.001sec$，計算時間を 2000sec としている．図-６，７に $f_2 = 1.10Hz$ (case1)，$f_2 = 1.02Hz$ (case2)の場合の質点１の変位応答および変位応答の自己相関関数を示す．

（２）振動特性推定結果

図-８，９に速度応答から推定した振動数，および振動数推定結果のヒストグラムを示す．40 秒間のデータを一回区として計 50 回の推定を行った．推定結果より，case1 では若干のばらつきが見られるものの，明確な振動数を確認することができ，また，ヒストグラムでも 1.00Hz と 1.10Hz にピークが発生している．一方，case2 では f_1 と f_2 の差が小さいため，振動数が明確に表れておらず，ヒストグラムでもピークが一つしか確認できなかった．

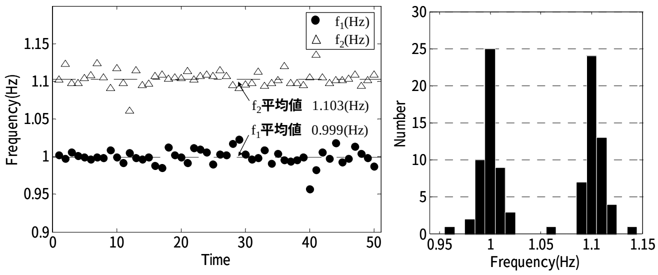

図-８ 振動数推定結果とヒストグラム(case1)

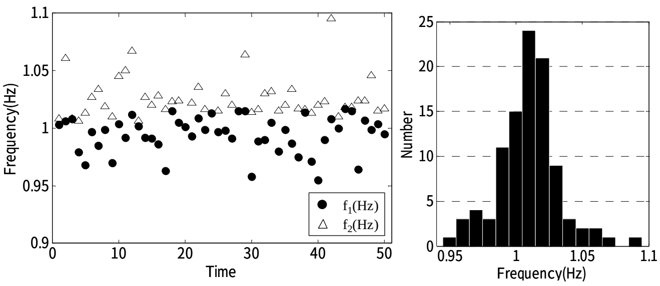

図-９ 振動数推定結果とヒストグラム(case2)

（３）推定精度向上のための工夫

case2 において推定精度向上のため，常時微動の自己相関関数を計算し，得られた波形から振動特性の推定を行った(case3)．図-10 が case3 の振動数推定結果である．case2 と比べてばらつきは小さく，1.00Hz と 1.02Hz 付近に振動数が確認でき，ヒストグラムでは２つのピークが見られる．また，表-２が各ケースの推定結果の平均値と変動係数を示したものであるが，case3 の結果のほうが平均値は設定値に近く，変動係数も小さい値となった．

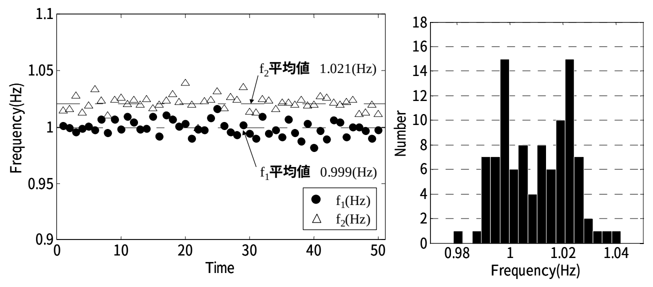

図-10 振動数推定結果とヒストグラム(case3)

６．まとめ

本研究では，近接固有値を有する構造物をモデル化し，実現理論を適用することで振動数の推定を行った．推定結果より，実現理論による振動特性推定手法は近接固有値を有する構造物に適用できることを確認し，衝撃加振シミュレーションでは高精度な推定が実現できた．また常時微動シミュレーションでも高い精度の推定が可能であることを確認した．

表-２　推定結果の誤差

		設定値(Hz)	平均値(Hz)	変動係数(%)
case1	f_1	1.000	0.999	1.038
	f_2	1.100	1.103	0.996
case2	f_1	1.000	0.995	1.613
	f_2	1.020	1.026	1.680
case3	f_1	1.000	0.999	0.694
	f_2	1.020	1.021	0.673

【参考文献】

1)岡林隆敏他：近接固有値を有する構造物の振動特性推定，土木学会論文集 No.633/I-49，pp.93~102，1999