

厳密解法による弾性基礎にある平板の 3 次元応力解析

大分工業高等専門学校 都市システム工学科

学生員 ○野中 翔

大分工業高等専門学校 都市システム工学科

正 員 名木野 晴暢

足利工業大学 都市環境工学科

正 員 末武 義崇

大同工業大学 都市環境デザイン学科

正 員 水澤 富作

北海道大学大学院 工学研究科北方圏環境政策工学専攻

フェロー 三上 隆

1. まえがき

平板は、土木、建築のみならず航空、原子力、海洋など多くの分野で用いられる基本的な構造要素の 1 つである。土木分野では、基礎構造、スラブ軌道や舗装道路などが平板としてモデル化されるが、これらの構造物は地盤上に架設される場合が多い。したがって、地盤の影響を考慮した平板の静力学的特性(変位や応力)を把握することは、実務設計上重要である。

さて、弾性基礎にある平板の曲げ問題の理論解析に関する既往の研究では、Reissner-Mindlin 平板理論に基づいた報告¹⁾があるが、板厚方向の影響を厳密に取り扱うことのできる 3 次元弾性論に基づいた報告は、著者らが知る範囲ではなされていないようである。

本論文では、弾性基礎にある平板の静力学的特性を明らかにするために、直方弾性体の支配方程式である Navier の方程式の厳密な解を誘導する。本論文の目的は、(1) 荷重、変位および応力に与える級数項数の影響の把握と解の妥当性の確認、(2) 弾性基礎にある平板の変位および応力に与える弾性基礎の影響の把握、の 2 点である。

2. Navier の方程式および境界条件

図-1 には、弾性基礎にある平板、座標系および変位の定義が示してある。弾性基礎は、Winkler 基礎でモデル化する。ここで、3 次元弾性論に基づく等質かつ等方的な平板は、微小変形かつ線形弾性であり、平板の上面($z = h$)で等分布満載荷重 q を受け、下面($z = 0$)で Winkler 基礎と接しているものとする。

物体力を無視した直方弾性体の支配方程式、すなわち Navier の方程式は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} &= 0; \quad \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} = 0; \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} &= 0; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

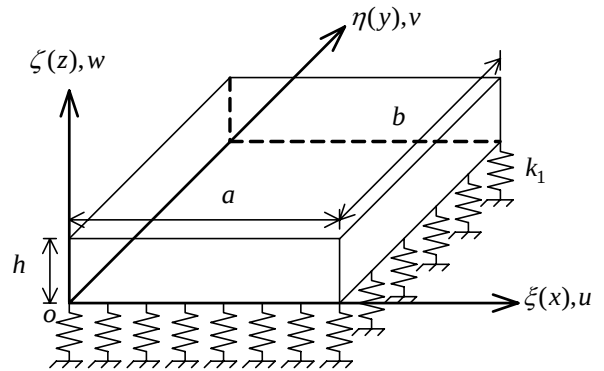


図-1 弾性基礎上の平板、座標系および変位の定義

ここで、 ∇^2 は Laplacian, e は体積ひずみであり、 ν はポアソン比である。

直方弾性体の周面が単純支持されていると仮定すれば、次の境界条件を満たさなければならない。

$$\begin{aligned} v = w = 0, \sigma_x = 0 \text{ at } x = 0 \text{ and } a; \\ u = w = 0, \sigma_y = 0 \text{ at } y = 0 \text{ and } b, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = k_1 w, \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \text{ at } z = 0; \\ \sigma_z = q, \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \text{ at } z = h \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 q は等分布荷重強度、 k_1 は Winkler 基礎のばね定数である。したがって、式(2)の境界条件を満たす変位は、厚さ方向を未知の関数とし、面内方向に 2 重 Fourier 級数展開すれば、次のように仮定できる。

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} U_{mn}(z) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right); \\ v &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} V_{mn}(z) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right); \\ w &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W_{mn}(z) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

また、 q も 2 重 Fourier 級数展開すれば、

$$q = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{16q_0}{mn\pi^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (5)$$

である。したがって、式(4)を式(1)に代入し、式(3)の条件下で解けば、 $U_{mn}(z)$, $V_{mn}(z)$, $W_{mn}(z)$ が求められる。

3. 数値計算例および考察

ここでは、Winkler 基礎にある平板の解(変位, 応力)と級数項の数および解の妥当性について検討し, 解析に必要な級数の展開項数について検討する. なお, 数値計算例では, 正方形平板($b/a = 1$)およびポアソン比 $\nu = 0.3$ とし, 次式で定義される無次元座標系および無次元ばね定数を用いる.

$$\xi = x/a; \eta = y/b; z = z/h, \Phi_1 = k_1 a^4/D. \quad (6)$$

3.1 等分布荷重 q の収束状態

本研究で誘導した厳密な解は, 無限級数和によって表現されるが, 数値計算の際には, 無限大を取り扱うことができないため, 何らかの根拠に基づき有限の級数展開項数で解を表現しなければならない. しかしながら, 既往の研究報告では, 級数の展開項数を具体的に述べたものは少なく, また, その根拠が明確にされていない場合が多い. そこで, 本論文では, 数値計算に用いる級数項の数の判断材料として, q の収束状態と級数の展開項数の関係に着目し, q を十分な精度(q_0 に対して誤差 1 % 以内)で表現することができる級数項の数について検討する.

表-1 には, q の収束性に与える級数項の数の影響が示してある. ここで, $q_0 = -1$ とし, 級数項の数 $m = n$ を 51 から 1501 まで変化させている.

これより, $m = n$ の増大にともない, q の値は -1 に向かう収束状態が示されている. また, q の十分な精度を確保するためには, $m = n$ を 151 以上取れば良いことがわかる. よって, $m = n = 151$ を基準とする.

3.2 変位および応力の収束状態と精度比較

ここでは, 3.1 節の結果を基準とし, 級数の展開項数を前後に変化させて, Winkler 基礎にある中等厚肉平板の面外変位 w と応力 $\sigma_x (= \sigma_y)$ の収束状態および解の妥当性を調べ, 解析に必要な級数の展開項数について検討する.

表-2 には, Winkler 基礎にある中等厚肉平板の面外変位 w と応力 $\sigma_x (= \sigma_y)$ の収束性に与える級数項の数の影響および解の精度比較が示してある. ここで, $h/a = 0.1$ とし, $m = n$ を 101 から 301 まで変化させ, Φ_1 は 81 と 625 に設定した. また, 解の妥当性を確認するための比較解として, 3 次元弾性論に基づく解析結果が見当たらないため, Kobayashi・Sonoda の Reissner-

表-1 q の収束性に与える級数項数の影響: $\xi = \eta = 0.5$

$m = n$	q	Error [%]
51	-0.97567	-2.43
101	-1.0125	1.25
151	-0.99164	-0.836
201	-1.0063	0.631
301	-1.0042	0.422
501	-1.0025	0.254
1001	-1.0013	0.127
1501	-1.0008	0.0848

表-2 Winkler 基礎にある中等厚肉平板の面外変位 w と応力 σ_x の収束性に与える級数項数の影響および解の精度比較: $h/a = 0.1, \xi = \eta = 0.5$

Φ_1	$m = n$	$\xi=0.5$	$\xi=1$	$\xi=0$
		$2Gw/qh$	σ_x/q	σ_x/q
81	101	-291.8	-23.34	23.13
	151	-291.8	-23.32	23.13
	201	-291.8	-23.33	23.13
	301	-291.8	-23.33	23.13
	Ref.1	-292.6	-23.00	23.00
625	101	-128.6	-9.184	8.874
	151	-128.6	-9.167	8.874
	201	-128.6	-9.179	8.874
	301	-128.6	-9.177	8.874
	Ref.1	-127.6	-8.892	8.892

Mindlin 平板理論に基づく厳密解¹⁾と比較を行った.

これより, 面外変位 w と応力 σ_x の値は, Φ_1 の値に関わらず, $m = n$ の増大にともない, 一定値へ収束している. また, $m = n = 151$ の結果は, Kobayashi・Sonoda の厳密な解¹⁾との最大誤差が 3 %以内であり, 良く一致している. なお, 紙面の都合上割愛したが, $h/a = 0.01$ (薄肉平板)および $h/a = 0.2$ (中等厚肉平板)でも同様の結果が得られている.

以上より, $h/a \leq 0.2$ である平板では, $m = n = 151$ を用いれば十分であると判断できる.

4. まとめ

本論文で得られた結果を以下に纏める.

- (1) $h/a \leq 0.2$ である平板を解析するために必要な級数の展開項数 $m = n$ は 151 である.
- (2) 解の妥当性は十分にある.

Winkler 基礎にある平板の変位および応力に与える弾性基礎の影響については, 当日報告する.

参考文献

- 1) Kobayashi and Sonoda: *Int. J. Mech. Sci.* **31**, pp.679-692, 1989.