

## 点支持された Mindlin 平板の固有振動数の収束状態について

大分工業高等専門学校 都市システム工学科 正員 ○名木野 晴暢  
 大同工業大学 都市環境デザイン学科 正員 水澤 富作  
 北海道大学大学院 工学研究科北方圏環境政策工学専攻 フェロー 三上 隆

### 1. まえがき

隅角部が点支持された平板のように、局所的に変位が拘束される問題では、数学的に閉じた解(厳密な解)を得ることが困難になる。近年、構造物の大型化、長大化にともない、比較的厚肉な平板が用いられる機会が増えているが、板厚の大きな平板では、薄肉平板では無視される面外せん断変形と回転慣性の影響が顕著に現れてくる。したがって、局所的な変位拘束(以下、点支持)を受ける中等厚肉や厚肉平板の自由振動特性(固有振動数と固有振動モード)を把握することが、構造設計上、重要な課題になる。

点支持された薄肉平板の自由振動問題は、古くから種々の数値解析法によりなされているが、Mindlin 平板理論に基づく中等厚肉平板を対象とした研究報告は少ない。Kitipornchai ら<sup>1)</sup>は、Lagrange 乗数法と  $pb$ -2 Ritz 法により、点支持された Mindlin 平板の自由振動問題を解析しているが、平板の板厚が大きくなると解が収束しない結果を示し、解の収束が遅いと論じている。しかしながら、この情報だけでは、どの程度の離散化量で解が収束するのか、また、最終的に解が収束するのかどうか、については、判断し難いと思われる。

本論文では、Lagrange 乗数法と B-spline Ritz 法を用いて、点支持された Mindlin 平板の自由振動解析を行い、固有振動数の収束状態を詳細に調べることを目的としている。

### 2. B-spline Ritz 法による自由振動問題の定式化

ここでは、B-spline Ritz 法を用いて、点支持された Mindlin 平板の自由振動問題を定式化する。

図-1 には、Mindlin 平板および座標系が示してある。ここで、 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h/2 \leq z \leq h/2$  の範囲で定義される Mindlin 平板は、微小ひずみかつ線形弾性であり、その運動は調和振動すると仮定する。また、 $a$  は平板の長さ、 $b$  は幅、 $h$  は厚さである。

定式化にあたり、式(1)で表される無次元座標系を導入し、また、3つの独立した2つの曲げによる回転

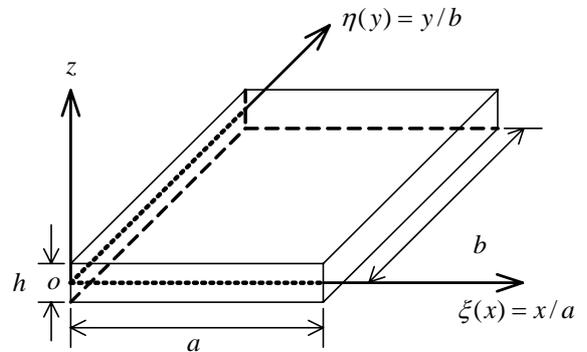


図-1 Mindlin 平板および座標系

角  $\phi_x(\xi, \eta)$ ,  $\phi_y(\xi, \eta)$  および無次元面外振幅変位  $W(\xi, \eta)$  は、正規化された B-spline 関数の 2 重積を仮定する。

$$\xi(x) = x/a; \quad \eta(y) = y/b. \quad (1)$$

$$\phi_x(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{i_\xi} \sum_{n=1}^{i_\eta} A_{mn} N_{m,k_\xi}(\xi) N_{n,k_\eta}(\eta);$$

$$\phi_y(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{i_\xi} \sum_{n=1}^{i_\eta} B_{mn} N_{m,k_\xi}(\xi) N_{n,k_\eta}(\eta);$$

$$W(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{i_\xi} \sum_{n=1}^{i_\eta} C_{mn} N_{m,k_\xi}(\xi) N_{n,k_\eta}(\eta). \quad (2)$$

ここで、 $N_{\alpha, \beta}(\Xi)$  ( $\alpha = m, n; \beta = k_\xi, k_\eta; \Xi = \xi, \eta$ ) は正規化された B-spline 関数、 $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}$  は未定係数であり、 $i_\xi = m_\xi + k_\xi - 2, i_\eta = m_\eta + k_\eta - 2$  である。ただし、 $m_\xi, m_\eta$  と  $k_\xi, k_\eta$  は、それぞれ、 $\xi, \eta$  方向に設けた区分点の数および spline 階数である。

Mindlin 平板の全ポテンシャルエネルギー  $\Pi$  は、次式で与えられる。

$$\Pi = U_{\max} + U_L - T_{\max} \quad (3)$$

ただし、 $U_{\max}$  は最大ひずみエネルギー、 $U_L$  は Lagrange 乗数による付帯条件の付加エネルギーであり、 $T_{\max}$  は最大運動エネルギーである。

したがって、式(2)を式(3)に代入し、全ポテンシャルエネルギー  $\Pi$  を Ritz 法により極値化すれば、次式の代数方程式が得られる。

$$([K] - \bar{\Omega}^2[M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (4)$$

ここで,  $\bar{\Omega} = \omega b^2 (\rho h / D)^{1/2}$  は振動数パラメータ,  $[K]$  は剛性マトリックス,  $[M]$  は質量マトリックス,  $\{\Delta\}$  は未定係数ベクトルであり,  $\{0\}$  は零ベクトルである.

### 3. 数値計算例および考察

ここでは, 4つの隅角部が点支持された Mindlin 平板を例に取り, 固有振動数の収束状態を詳細に調べる. ここで, 本解析法による解は, spline 次数と区分点の数に大きく依存するため, 多項式の次数のみを高める *pb-2 Ritz 法*<sup>1)</sup> よりもかなり密な離散化が可能である. 数値計算例では, 辺長比  $b/a=1$  である板厚比  $h/a=0.001$  (極薄肉平板) と  $h/a=0.2$  (中等厚肉平板) を代表例に取り, ポアソン比  $\nu=0.3$  およびせん断修正係数  $\kappa^2 = \pi^2/12$  を用い, spline 次数  $(k_\xi - 1) \times (k_\eta - 1)$  は, 断面力-ひずみ場まで連続になることを考慮し,  $2 \times 2$  以上に設定している. また, 平板の振動数パラメータは, 次式で表す.

$$\Omega = \omega b^2 / \pi^2 (\rho h / D)^{1/2} \quad (5)$$

図-1 と図-2 には, それぞれ, 極薄肉平板と中等厚肉平板の基本振動数パラメータ  $\Omega_{1st}$  の収束性に与える spline 次数  $(k_\xi - 1) \times (k_\eta - 1)$  と区分点の数  $m_\xi \times m_\eta$  の影響が示してある. ここで,  $m_\xi \times m_\eta$  は  $5 \times 5$  から  $49 \times 49$  まで増加させ,  $(k_\xi - 1) \times (k_\eta - 1)$  を  $2 \times 2$  から  $6 \times 6$  まで変化させることで, 解の収束状態と  $(k_\xi - 1) \times (k_\eta - 1)$  および  $m_\xi \times m_\eta$  の関係について調べた.

図-1 より, 極薄肉平板の  $\Omega_{1st}$  は,  $(k_\xi - 1) \times (k_\eta - 1)$  にかかわらず,  $m_\xi \times m_\eta$  を増大させれば一定値へ向かう上からの一様な収束状態が示されている. ここで,  $(k_\xi - 1) \times (k_\eta - 1)$  の影響について整理すると, 低次の spline 次数  $(k_\xi - 1) \times (k_\eta - 1) = 2 \times 2$  では, 解の収束が遅く, 収束値を得るには至らないが,  $(k_\xi - 1) \times (k_\eta - 1)$  を  $3 \times 3$  以上に設定すれば, 解の収束は早まり, 収束値を得ていると判断できる. 得られた収束値 ( $\Omega_{1st} = 0.7204$ ) は, Kitipornchai ら<sup>1)</sup> の結果 ( $\Omega_{1st} = 0.7205$ ) より僅かに小さめである. 他方, 図-2 より, 中等厚肉平板の  $\Omega_{1st}$  は,  $(k_\xi - 1) \times (k_\eta - 1)$  にかかわらず,  $m_\xi \times m_\eta$  を増大させれば,  $\Omega_{1st}$  の値は緩やかに減少するが, 極薄肉平板の場合と異なり, 一定値に収束するような結果は得られていない. また,  $(k_\xi - 1) \times (k_\eta - 1)$  を高次に高めるほど,  $\Omega_{1st}$  の値が小さくなる傾向にある. この解の収束状態の相違は, 紙面の都合上割愛したが, 断面

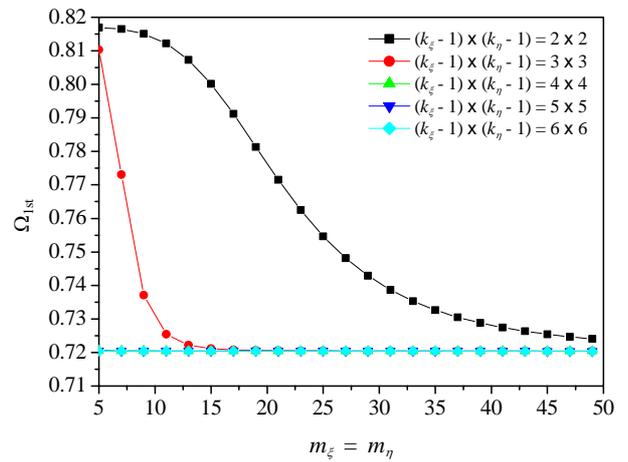


図-1 極薄肉平板の  $\Omega_{1st}$  の収束性に与える  $(k_\xi - 1) \times (k_\eta - 1)$  と  $m_\xi \times m_\eta$  の影響:  $h/a = 0.001$

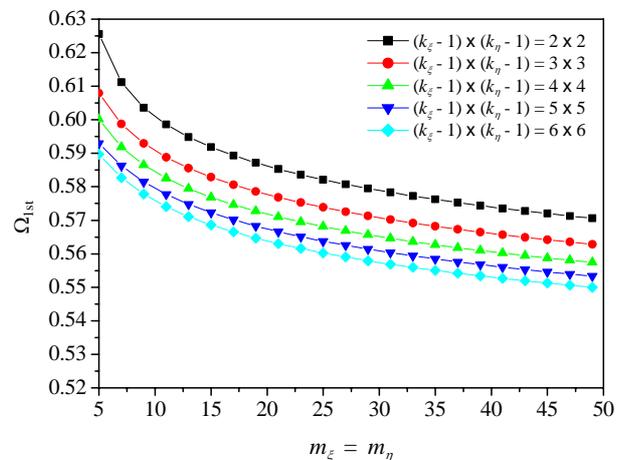


図-2 中等厚肉平板の  $\Omega_{1st}$  の収束性に与える  $(k_\xi - 1) \times (k_\eta - 1)$  と  $m_\xi \times m_\eta$  の影響:  $h/a = 0.2$

力モードと板厚比  $h/a$  の関係に大きく依存しており, 厚肉な平板になると, 点支持された位置で断面力集中が生じ, 問題が特異になるためと推察される. したがって, 点支持された厚肉な平板の固有振動数の収束値を求めることは困難であると言えよう.

### 4. まとめ

本論文では, B-spline Ritz 法を用いて, 点支持された Mindlin 平板の固有振動数の収束状態を既往の研究報告よりも詳細に調べた. その結果, 厚肉な平板になると, 問題が特異になると推察されるため, かなり密に離散化しても固有振動数の収束値を得ることは困難であることを確認した.

### 参考文献

- 1) Kitipornchai et al.: *Journal of Sound and Vibration* **173**, pp.457-470, 1994.