

平衡確率実現理論を用いた常時微動による道路橋振動特性の推定

長崎大学大学院 学生会員 ○出口浩二 長崎大学工学部 フェロー 岡林隆敏
 長崎大学工学部 学生会員 大塚文博

1. はじめに

赤池は、正準相関解析(Canonical Correlation Analysis)に基づく確率実現理論¹⁾を提案した。この手法は、確率統計的な処理により確率実現理論を構成する特徴がある。その後、Desai²⁾は、この手法を洗練して平衡確率実現手法を提案した。ここでは、平衡確率実現法を橋梁振動特性推定に適用する。確率実現法のプログラムは文献³⁾を参考にしている。確率実現問題は、 $y(t)$ の共分散行列(あるいは、スペクトル密度行列)が与えられたとき、その出力共分散行列(あるいはスペクトル密度行列)が与えられたものと等しくなるようなマルコフ状態空間モデルを求める問題である。

2. シミュレーション概要

構造モデルは、図-1に示すランガー橋である。モデル諸元を表-1に、ランガー橋の1~8次までの固有振動数を表-2に示す。また、固有値解析による振動モードを図-2に示す。離散系の状態方程式は次式で表される。

$$x(k+1) = Ax(k) + Bf(k) \quad y(k) = Cx(k) \quad (1)$$

本研究では、図-1の節点 ~ の鉛直方向に互いに独立な白色雑音を与えた場合の速度応答を常時微動とし、シミュレーションを行った。数値解析法はモード解析法を用いた。また、各振動次数のモード減衰は、 $h_k = 0.02$ と仮定した。平衡確率実現理論に基づいて、この状態方程式のシステム行列を推定する。このシステム行列の固有値解析より、振動数、減衰定数、振動モードを推定するものである。

3. 振動特性推定法

1) 平衡確率実現手法 ()

速度応答より算出されたハンケル行列は、マルコフパラメータより、

$$Y_{k|2k-1} = \begin{bmatrix} y(k) & \cdots & y(k+N-1) \\ \vdots & & \vdots \\ y(2k) & \cdots & y(N+2k-2) \end{bmatrix} \in R^{kp \times N} \quad (2)$$

と表される。 $Y_p = \tilde{Y}_{0|k-1}$ は過去のデータ、 $Y_f = Y_{k|2k-1}$ は未来のデータである。次に共分散行列 Σ_{ff} 、 Σ_{pp} の平方根行列を求める

$$\Sigma_{ff} = MM^T, \quad \Sigma_{pp} = LL^T \quad (3)$$

となり、(3)式より Σ_{pf} の正規化された特異値分解を求める。

$$L^{-1}\Sigma_{pf}(M^{-1})^T = U\Sigma V^T \cong U_s\Sigma_s V_s^T \quad (4)$$

ここに、 Σ_s は Σ の小さい特異値を無視することにより得られる。状態ベクトルの次元は $n = \dim \Sigma_s$ となる。

拡大可観測および拡大可到達行列を以下のように定義すると、

$$O_k = LU_s\Sigma_s^{1/2}, \quad C_k = \Sigma_s^{1/2}VM^T \quad (5)$$

となり、(5)式より、

$$A = O_k \backslash \bar{O}_k, \quad C = O_k(1:p,:) \quad (6)$$

O_k 、 $\bar{O}_k$ はそれぞれ O_k の下 p 行、および上 p 行を除いた行列である。

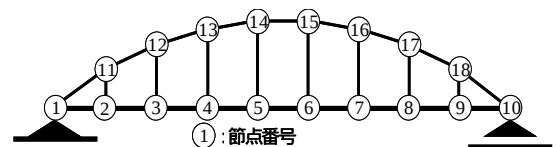


図-1 ランガー橋モデル

表-1 モデル諸元

形式		補剛桁橋
支間長	L(m)	58.995
ライズ	f(m)	9.36
補剛桁の断面積	$A_b(m^2)$	2.24×10^{-2}
扶肋の断面積	$A_r(m^2)$	2.24×10^{-2}
曲げ剛性	$E(kN \cdot m)$	1.74×10^4
桁全重量	$W_k(kN)$	147×10^3
格点数		9

表-2 固有振動数

次数	振動数(Hz)
1次	1.742
2次	2.558
3次	4.018
4次	6.355
5次	9.734
6次	13.62
7次	17.61
8次	20.76

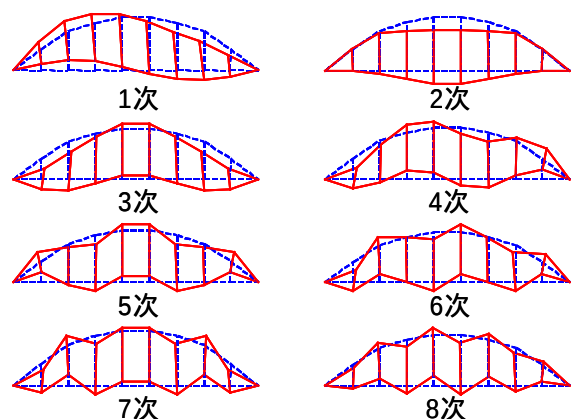


図-2 固有値解析による振動モード

2) 平衡確率実現手法 ()

$$\bar{X}_k = \hat{\Sigma}_s^{1/2} \hat{V}_s^T M^{-1} \tilde{Y}_{0|k-1} \in \mathbf{R}^{n \times N} \quad (7)$$

を求め、 $N-1$ 列からなる行列を定義する。

$$\hat{X}_{k+1} = \bar{X}_k(:, 2:N) \in \mathbf{R}^{n \times (N-1)} \quad (8)$$

$$Y_{k|k} = [y(k) \cdots y(k+N-1)] \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{k+1} \\ \hat{Y}_{k|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \hat{X}_k + \begin{bmatrix} \rho_w \\ \rho_v \end{bmatrix} ((n+p) \times (N-1)) \quad (10)$$

右から $\hat{X}_k^T$ をかけることにより A, C を求める。

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \hat{X}_{k+1} \\ \hat{Y}_{k|k} \end{bmatrix} \hat{X}_k^T \right) (\hat{X}_k \hat{X}_k^T)^{-1} \quad (11)$$

(6)(11)式より、 A の固有値から固有値の X_{Re} 、 X_{Im} を用いて、次式から固有円振動数 ω_k 、減衰定数 h_k を推定できる。

$$\begin{aligned} h_k \omega_k &= (-1/\Delta) \ln \sqrt{X_{Re}^2 + X_{Im}^2} \\ \omega_k \sqrt{1-h_k^2} &= (1/\Delta) \tan^{-1}(X_{Im}/X_{Re}) \end{aligned} \quad (12)$$

ここに、 Δ はサンプリング時間である。

4. 振動特性推定結果

振動特性推定は、平衡確率実現手法()、平衡確率実現手法()とともに 30 秒間の速度応答データを 1 回区分として合計 100 回発生させて、振動数、減衰定数の推定を行った。平衡確率実現手法()による振動数推定軌跡、減衰定数推定軌跡をそれぞれ図-3、図-4 に示す。これらの結果から、各次数における振動数と減衰定数が推定できていることが確認できる。また、図-5 は平衡確率実現手法()により算出された合計 100 回の振動モードの平均値をプロットしたものである。平衡確率実現手法()、平衡確率実現手法()とともに、固有値解析で求められた振動モードと比較してみると、全次数において良好に振動モードが推定できている。

次に、両手法における振動特性推定結果を表-3 に示す。この表より、両手法の振動数の推定は変動係数 1%程度となり、ほぼ同精度であることが確認できたが、減衰定数においては平衡確率実現手法()で求めた低次と高次の平均値が設定した値の 0.02 よりも高い推定値となっている。

5. まとめ

平衡確率実現手法()、および平衡確率実現手法()を用いて、対象モデルの振動特性推定を行い、その精度検証を行った。両手法の振動特性推定精度は、振動数はほぼ同精度であるが、減衰定数においては両手法の間に誤差が確認された。

【参考文献】1) H.Akaike:SIAM J.Control,vol.13,no.1,pp.162-173,1975.

2) U.B.Desai,D.Pal and R.D.Kirkpatrick:Int.J.Control,vol.42,no.4,pp.821-838,1985.

3) 片山徹:システム同定,朝倉書店,2004,2

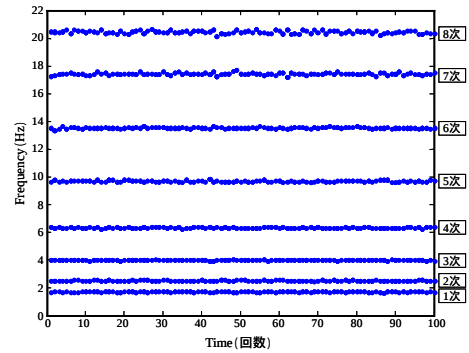


図-3 平衡確率実現手法()による振動数推定軌跡

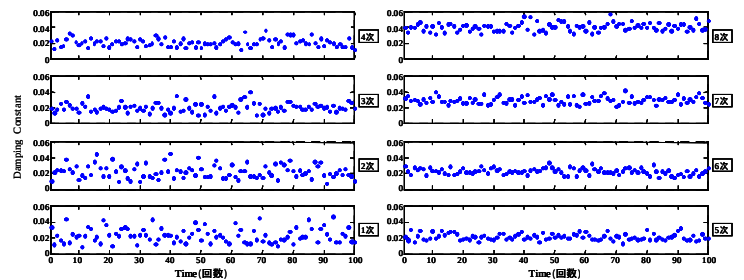


図-4 平衡確率実現手法()による減衰定数推定軌跡

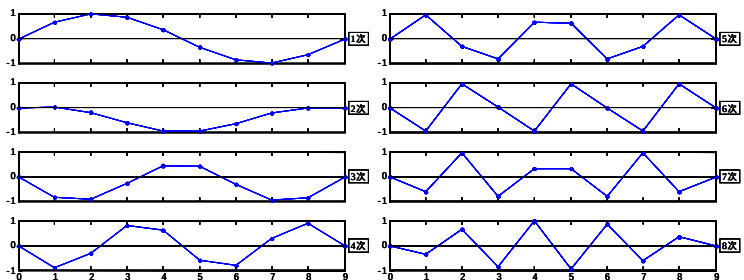


図-5 平衡確率実現手法()による振動モード推定軌跡

表-3 振動特性推定結果

		振動数				減衰定数			
		解析値(Hz)	平均値(Hz)	標準偏差(Hz)	変動係数(%)	設定値	平均値	標準偏差	変動係数(%)
1次	手法	1.742	1.741	0.0200	1.147	0.02	0.024	0.0107	44.22
	手法		1.779	0.0309	1.736		0.064	0.0257	40.31
2次	手法	2.558	2.557	0.0212	0.828	0.02	0.023	0.0084	36.77
	手法		2.586	0.0253	0.979		0.033	0.0117	35.25
3次	手法	4.018	4.018	0.0212	0.529	0.02	0.020	0.0057	28.11
	手法		4.036	0.0247	0.611		0.024	0.007	29.69
4次	手法	6.355	6.359	0.0290	0.455	0.02	0.021	0.0053	25.04
	手法		6.366	0.0387	0.607		0.023	0.0054	23.62
5次	手法	9.734	9.720	0.0471	0.485	0.02	0.022	0.0043	19.77
	手法		9.683	0.0573	0.592		0.025	0.0062	24.56
6次	手法	13.616	13.56	0.0548	0.404	0.02	0.023	0.0041	17.86
	手法		13.47	0.0715	0.530		0.032	0.0066	20.45
7次	手法	17.607	17.45	0.0820	0.470	0.02	0.030	0.0047	15.73
	手法		17.30	0.1322	0.764		0.046	0.0085	18.60
8次	手法	20.763	20.46	0.1063	0.520	0.02	0.042	0.0059	14.13
	手法		20.21	0.1647	0.815		0.068	0.0112	16.58