Q-Sequence を表現する Binary code に関する基礎的研究

九州共立大学大学院　学生員　相良栄作，石川康成
九州共立大学大学院　正会員　三原徹治，趙 華 安
第　一　復　建　㈱　正会員　千々岩浩巳

１．はじめに

異なる大きさの長方形ブロックを重ねることなく敷詰め，それらすべてを包含する長方形（囲方形）の大きさを最小にするという囲方形最小化問題（矩形パッキング問題）は最適配置問題の最も基礎となるものである．この問題は NP 完全であるため，その最適解を確実に得ることができる解析的な最適化解法は発見されておらず，また種々の近似最適化手法の適用も試みられているが特筆できる成果は残念ながら得られていない．

本研究の最終目的は近似最適化手法の一種である遺伝的アルゴリズム GA によって囲方形最小化問題の一解法を確立することにあるが，そのためには克服すべき難問が山積している．その最初の，そして最大の難問は「部屋配置」を表わす Quarter State Sequence（Q-Sequence）[1]を GA での最適化計算に必要な Binary code で表現することである．本文ではその基礎的な部分について報告する．

２．囲方形最小化問題（矩形パッキング問題）における部屋の配置と Q-Sequence

全 NB 個の長方形ブロック（それぞれの辺長は A_i, B_i ，面積 $S_i = A_i B_i$ ）を互いに重ならないように配置したときにすべての長方形ブロックを包含する長方形（囲方形）の面積 $S_0 = A_0 B_0$ （ A_0, B_0 は囲方形の辺長）が最小となるような全 NB 個の長方形ブロックの最適配置を求める問題を囲方形最小化問題あるいは矩形パッキング問題という．その原問題は式(1)のように定式化されるが，長方形ブロックの配置には「ある１つの長方形ブロックが入る部屋の配置」と「各部屋への長方形ブロックの割当て」という２つの手順を必要とする．

$$\begin{aligned} &\text{Given}: && A_i, B_i \ (S_i = A_i B_i) \quad (i = 1:NB) \\ &\text{Find}: && A_0, B_0 \\ &\text{Object}: && \text{Minimize}[S_0 = A_0 B_0] \end{aligned} \qquad (1)$$

Q-Sequence は上壁 W_T，左壁 W_L および各部屋の主セグ（部屋の右下隅で終了している線分を指し，この線分が垂直（水平）なとき垂直（水平）主セグと呼ぶ）の Q-State を並べて部屋配置を表現するものであり「すべての部屋の名前 p と２種類の記号 R_p，B_p からなる順列で部屋配置を表現する」，「任意の部屋配置→Q-Sequence の一意のコード化が可能」および「任意の Q-Sequence →部屋配置の一意のデコード化が可能」という特長を有する．このようなブロック配置の位相関係を表現するデータ構造は Q-Sequence 以外にも種々提案されているが，Q-Sequence はそれらと比較してデータ数が少なくてすむ点において評価され，注目されている．

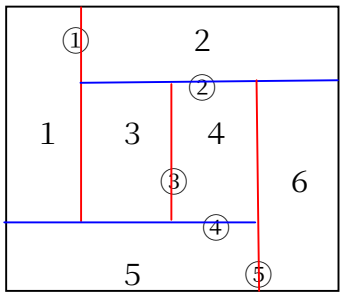

図-1　６部屋の配置例

図-1 に NB ＝6 の部屋配置の一例を示す．ここに数字は部屋名を示し，○数字で示すセグは対応する部屋の主セグである（赤線は垂直主セグを，青線は水平主セグを示す）．この場合，上壁 W_T には水平主セグに相当するセグしかなく，その下に部屋 1 と 2 が隣接するのでその Q-State は $W_T B_2 B_1$ となる．部屋 1 は垂直主セグを有し，その右に部屋 2 と 3 が隣接するのでその Q-State は $1 R_3 R_2$ となる．同様に左壁 W_L および部屋 2～6 の Q-State を求め，それらを上壁，左壁さらに部屋番号順に並べると $W_T B_2 B_1 W_L R_5 R_1 1 R_3 R_2 2 B_6 B_4 B_3 3 R_4 4 B_5 5 R_6 6$ という Q-Sequence が得られる．なお，部屋配置を Q-Sequence で表現するとき，その部屋名前は安部順序 [2]に従ってつけられることになる．

Q-Sequence であるための必要十分条件は次の２条件である（若干の解説も併せて記述する）．

条件１：Q-Sequence の中で，任意の部屋 p に対して，R_p と B_p はそれぞれちょうど１回 p の前に登場し，それらのうちどちらか一方は p の直前に登場する．⇒２つの部屋名の間には１個以上の R または１個以上の B

のどちらかが登場する．例えば k=j+1 のとき…j□R_kk…の□には R しか登場せず，…j□B_kk…の□には B しか登場しない．

条件 2：Q-Sequence において，R_j（あるいは B_j）と部屋名 j の間には，j<k である R_k（あるいは B_k）は登場しない．⇒k＝1,2,･･･, *NB* について，R_k と k の間にはカッコ対応関係が成立ち，B_k と k の間にも同様にカッコ対応関係が成立つ．例えば，j<k のときに……R_j……R_k……B_jj……B_kk……のような並びは存在しない．

3．Q-Sequence を表現する Binary code の構成

式(1)に示す囲方形最小化問題を遺伝的アルゴリズム GA で解く際に，部屋配置を表現する Q-Sequence をそのままの形で用いることはできず，Binary code で表現する必要がある．このとき，「Binary code→Q-Sequence の一意の変換が可能である」ことは必須条件であるが，GA による最適化計算の効率化のために「できるだけ Q-Sequence の必要十分条件を満足できない線列（致死遺伝子）を発生させない」および「できるだけ Binary code の線列長を短くする」という条件もクリアできることが望ましい．そこで本研究では以下のように Q-Sequence を表現する Binary code を構成する方法を考案した．

Step1：左壁および上壁を固定した阿部順序では，k＝1 の部屋は常に左上隅に配置され，その符号は 2 つとも壁（上壁あるいは左壁）の Q-State に登場する．したがって，Q-Sequence の構成では省略することができる．よって k＝2,3,･･･, *NB* の部屋名の直前の符号を付与するために，0：B，1：R なる対応の(*NB* -1)bit の Binary code を構成する． *NB* ＝6 のときの一例を示す．

例：10101 → B_1□0□$R_1$1 □1□$R_2$2 □2□$B_3$3 □3□$R_4$4 □4□$B_5$5 $R_6$6

Step2：k＝2 の部屋は常に部屋 1 の右もしくは下に配置されるので，部屋 2 の残りの符号 B_2 は壁（上壁あるいは左壁）の Q-State に登場する（0の位置にしか入らない）．したがって次に付与すべき符号は部屋 3 の残りの符号 R_3 である．その付与位置の候補は条件 1 より部屋名 3 の左にある 0，1 および 2 が候補であるが，部屋名 3 の直前のセクション 2 には部屋 3 の残りの符号 R_3 を置くことができない．よって 1bit の Binary code を 0：0 に置く，1：1 に置くという対応付けで構成する．

例：10011 1 → B_1□0□$R_1$1 □1□$R_3R_2$2 □2□$B_3$3 □3□$R_4$4 □4□$B_5$5 $R_6$6

Step3：k＝m (m>3)の残りの符号を付与するときには k＝m-1 までのすべての符号が付与されており，付与する符号の種類も確定しているので，符号を付与する可能セクション名を決定できれば，符号付与のオペレーションは完了する．したがって Binary code が示す 2 進数を 10 進数に変換して残りの符号を付与するセクション番号と対応させるような $INT\left[\log_2(m-2)\right]+1$bit の Binary code を構成する．

例：10011 1 01 01 001→ B_2B_1□0□$R_5R_1$1 □1□$R_3R_2$2 □2□$B_6B_4B_3$3 □3□$R_4$4 □4□$B_5$5 $R_6$6

以上の手続きにより図-1 に示す配置例の Q-Sequence $W_TB_2B_1W_LR_5R_1$1 $R_3R_2$2 $B_6B_4B_3$3 $R_4$4 $B_5$5 $R_6$6 を表現する Binary code 1001110101001 が構成される（実際には，カッコ対応関係を維持するために参照テーブルと名付けたオペレーションも必要である．このことに関しては紙面の都合上説明を割愛する）．

この 1/0 データはランダムに与えることができるのでランダムな Q-Sequence を 0/1 乱数から生成することが可能となった．また必要なデータ数が少ないとされている Q-Sequence に比較してさらに少ないデータ数で，しかも 0/1 信号で部屋配置を表現できることになり，当初目的としていた GA のための線列としてだけでなくさらに応用範囲を拡大できる可能性を秘めたものとなっている．提案法の妥当性を確認するために *NB* ＝6 のときのランダムな Binary code から Q-Sequence への変換の一例（壁の Q-State は省略）を表-1 に示す．

表-1 *NB* ＝6 の場合のランダムな Binary code→Q-Sequence 変換の一例（壁の Q-State は省略）

0100101101101	→	$1B_2 2R_5R_4R_3 3B_4 4B_6B_5 5R_6 6$	1000100010110	→	$1R_2 2B_3 3B_6B_4 4B_5 5R_6 6$
0101001111001	→	$1B_2 2R_6R_4R_3 3B_5B_4 4R_5 5B_6 6$	1101100001001	→	$1R_2 2R_3 3B_6B_5B_4 4R_5 5R_6 6$
0100000110010	→	$1B_2 2R_4R_3 3B_4 4B_5 5B_6 6$	1010011000110	→	$1R_3R_2 2B_3 3R_4 4B_5 5B_6 6$

参考文献 1)坂主圭史：ブロック配置の位相関係を表現する様々なデータ構造とその応用,東京工業大学博士論文,2002.3. 2)安部道雄：正方形の内部を総て異る有限個正方形で隙間なく一重に覆う問題に就いて,日本数学物理学会会誌,第 4 巻,第 4 号,pp.359-366,1930.12.