

最大流制約を受けるネットワークの最適更新手法に関する一考察

第 一 復 建 (株) 正会員 千々岩浩巳
九州共立大学大学院 正会員 三原徹治, 趙 華 安
九州共立大学大学院 学生員 石川康成, 相良栄作

1. はじめに

ネットワークの基本的解析問題は, 最小ツリー解析, 最大流解析, 最短路解析および最小費用解析に大別される. それぞれの解析に関して効率的に正解を求めるさまざまな手法が, 主としてグラフ理論の研究者によって提案されている. しかしながら, ネットワークの修正に関する研究はさほど多くない. その理由として, 一般的な最適性規準の設定が困難であること, 結局 NP 困難な問題となる場合が多いことなどが考えられる.

最大流解析は, 電気回路網, 人や物資を運ぶ輸送網, 情報を伝達する情報網などを抽象化したフローネットワークを対象とし, フローネットワークの入口 (ソース) から出口 (シンク) へ流すことができる最大の流量を求める解析法である. 最大マッチング問題など最大流解析に帰着される問題も多く, 応用範囲が広い解析法でもある.

本研究では最大流制約を満足するフローネットワークの最適更新に関する一手法を提示する. その際, ネットワーク構造は変更しないとし, 辺容量の変化のみによって最大流制約を満足させるものとする. この種問題を論理的アルゴリズムによって解く試みは著者のひとりによってなされているが, 種々の問題点を解決できない現状にあり¹⁾, 近似アルゴリズムの利用が求められている. 本文では近似アルゴリズムとして遺伝的アルゴリズム GA を用いた新しい試みについて報告する. なお, 通常最大流解析では辺長 (ノード間距離) は意味を持たないとして扱われるので, 本研究でもそれに倣うこととする.

2. ネットワーク更新問題

初期フローネットワークの最大流を $F'_{\max}$, 最大流量の要求値を $F_{req} (> F'_{\max})$, 変更後のフローネットワークの最大流を $F_{\max}$ とすると, 3 者は $F_{\max} \geq F_{req} > F'_{\max}$ の関係にある.

フローネットワークの辺の総数を I , 辺 i の初期辺容量を $C'_i (i=1:I)$, 増加量 $\Delta C_i (i=1:I)$ とすると, 更新後の辺容量は $C_i = C'_i + \Delta C_i (i=1:I)$ となる. このとき辺容量の増加量の総和 $MF = \sum \Delta C_i$ はネットワーク更新の優劣を示す重要な指標となる. また, $\Delta C_i > 0$ が割当てられる辺の総数 ME も同様の指標となる.

ここに MF および ME は, いずれもなるべく小さいほうがフローネットワークの変更としては望ましい. その際, 最大流に関する関係式 $F_{\max} \geq F_{req} > F'_{\max}$ は最適化問題では制約条件となる. よって, 最大流の要求値を満足するフローネットワークの更新問題の原問題は式(1)のような 2 目的最適化問題として定式化される.

式(1)は目的関数をスカラー化しなければ解くことができない. 本研究では種々のスカラー化手法について検討し, 式(2)のような積型のスカラー化関数を採用した.

Given: ネットワーク構造, $C'_i (i=1:I)$, F_{req}

Find: $\Delta C_i (i=1:I)$

Object: Minimize(MF) (1a)

Minimize(ME) (1b)

Subject to: $F_{\max} \geq F_{req}$ (1c)

$$\text{Minimize}(\text{Obj} = MF \times ME) \quad (2)$$

3. GA 適用のための定式化

(1) 線列構成: GAによる最適化計算には, 多くの個体が必要である. その個体を表現する線列は通常 2 進数で構成される. 辺容量増量の最小値を 0, 増分刻みを 1, 最大値を $\Delta C_i^{\max}$ とすると GA による最適化に必要な最適化対象辺 i の 2 進数線列のサイズは $\lceil \log_2 \Delta C_i^{\max} \rceil + 1$ (3) で算出される. ただし, $\lceil \cdot \rceil$ はガウス記号である.

(2) 罰金関数: 個体の評価に用いる罰金関数 PF は, γ を十分大きな定数 (本研究では $\gamma = 100.0$ に設定) とすると $PF = \text{Obj} + \max\{0, \gamma(F_{req} - F_{\max})\}$ (4) と定式化される. 制約条件を満たす個体では第 2 項が 0 で $PF = \text{Obj}$ である. そうでない個体ではたとえ Obj 値が小さくとも第 2 項が大きくなり, PF 値も大きくなる.

4. 数値計算例

(1) 初期フローネットワーク：ノード数 = 9，辺数 = 11 の比較的小さなフローネットワークのグラフを表-1 に示す．ノード をソース，ノード をシンクとする．このグラフは図-1 のようにネットワーク表示できる．

このフローネットワークにおいて、辺番号表記でルート $2 \rightarrow 6$ で流量 = 2，ルート $3 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11$ で流量 = 2 を流せることは容易にわかる．残るルート $1 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 10$ とルート $1 \rightarrow 5$ では、6 と 0，5 と 1，4 と 2 のいずれかの組合せの流量が流せることになるが、いずれの場合もその合計流量 = 6 で、流量の総計 = 10 が最大流である．なお、図-1 において赤線表示した辺はこの場合のボトルネックであり、それらの辺容量の合計、すなわち最小カット容量 = $6+2+2=10$ は最大流 = 10 と一致する（最大流最小カット定理）．

表-1 フローネットワークのグラフ

辺番号	1	2	3	4	5	6
始点						
終点						
容量	6	5	6	8	2	2
辺番号	7	8	9	10	11	
始点						
終点						
容量	7	7	6	6	2	

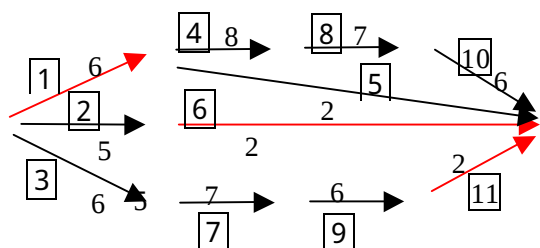


図-1 初期ネットワーク図

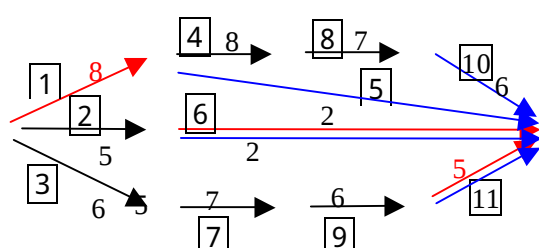


図-2 最適解 E のネットワーク図

(2) 限定列挙法による最適解探索：最大流 $F'_{\max} = 10$ であるからこれより大きい $F_{\text{req}} = 15$ を最大流の要求値とする．最適化の対象となるすべての辺の辺容量の増分値 $\Delta C_i = 0, 1, 2, \dots, 7$ とする．このときの組合せ総数 = $8^{11} = 85.9$ 億である．この問題の最適解を列挙法によって探索するには、すべての組合せに対してその最大流値を最大流解析ルーチンを用いて求めなければならず、1回の最大流解析時間を

表-2 限定列挙法による最適解

辺番号	1	2-5	6	7-10	11
A	0	0	1	0	4
B	0	0	2	0	3
C	0	0	3	0	2
D	1	0	0	0	4
E	2	0	0	0	3
F	2	0	3	0	0

を 0.001 秒とかなり短目に仮定しても、 $85.9 \text{ 億} \times 0.001 \text{ 秒} = 99.4 \text{ 日}$ という時間を必要とする．しかし本例の場合、ある組合せの Obj 値の計算時間は 10^{-10} 秒程度であり、すべての組合せの Obj 値を算出するだけなら 10 秒以下ですむ．このような性質を有する問題の最適解探索に有効な限定列挙法²⁾により高い最適性を有する解を探索した． Obj 値 > 15.0 および $ME > 2$ の組合せに対して最大流解析ルーチンを省略した結果、約 2 時間で計算を終了した．本例では 6 組の同値の最適解 ($MF = 5$, $ME = 2$, $F_{\max} = 15$, $Obj = 10$ の解) が存在することが判明した．表-2 に 6 組の最適解の辺容量の変化量を示す．表中、A ~ F は最適解を区別するための記号である．一例として最適解 E のネットワーク図を図-2 に示す．変更された辺容量を赤字で、初期ネットワークと同じボトルネックを赤線で、新たに出現したボトルネックを青線で、それぞれ表示している．

(3) GA による最適解探索：GA には著者らが開発した scsGA (交配個体選択 GA) を用いた．その計算パラメータは人口数 $N_P = 200$ ，交配個体数 $N_S = 20, 21, \dots, 40$ (21 ケース)，計算世代数 $N_G = 50$ ，突然変異発生確率 $P_m = 0.2, 0.3$ (2 ケース) とした．合計 42 ケース中 33 ケースで表-2 に示す 6 種の同値の最適解のいずれかが得られた．合計 42 ケースの計算時間は約 1 分程度であり、最適解探索能力が高いのみならず計算効率の面からこの種問題の最適解を近似アルゴリズムの一種である GA を用いて探索することの有用性を確認することができた．今後はさらに大きなフローネットワークへ適用拡張した場合の検討が必要と思われる．

参考文献 1) 王京，趙華安：最大流制約のネットワーク最適法，電子情報通信学会全国総合大会講演論文集，A-1-19，2005.3.

2) 三原徹治，千々岩浩巳：解特性に着目した離散的 2 目的最適塑性設計法に関する一考察，構造工学論文集，Vol.40-A，1994.3.