平衡確率実現法を用いた構造物振動特性自動推定への適用

長崎大学大学院　学生会員　○出口浩二　　長崎大学工学部　フェロー　岡林隆敏
長崎大学大学院　学生会員　大岩根健吾

1．はじめに

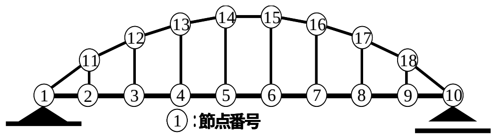
構造物の健全度を振動特性(固有振動数，減衰定数，振動モード)の変化から評価するためには，高精度な振動特性推定法の開発が必要となる．本研究では，部分空間法[1)]の有効性を確認するために，ERA法[1)]との精度の比較を行った．対象とする橋梁モデルの常時微動シミュレーションにより，本手法の有効性を検討した．

2．シミュレーション概要

対象とする構造モデルは，図ー1 に示すランガー橋である．モデル諸元を表ー1 に，ランガー橋の 1〜8 次までの固有振動数を表ー2 に示す．また，固有値解析による振動モードを図ー2 に示す．本研究では構造同定手法として ERA 法，および部分空間法による 2 つの推定手法を用いた．図ー3 に両手法における同定の流れを示す．離散系の状態方程式は次式で表される．

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(k)\quad \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)\qquad(1)$$

本研究では，図ー1 の節点②〜⑨の鉛直方向に互いに独立な白色雑音を与えた場合の速度応答を常時微動とし，シミュレーションを行った．数値解析法はモード解析法を用いた．また，各振動次数のモード減衰は，$h_k=0.02$ と仮定した．



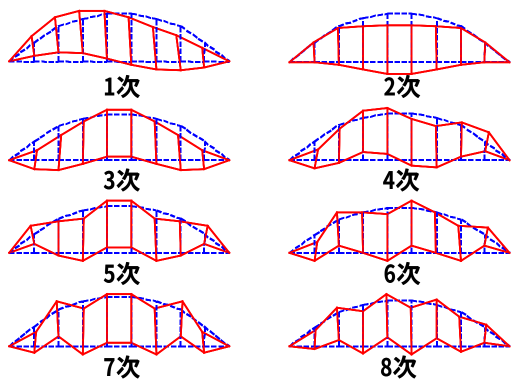
図ー1　ランガー橋モデル

表ー1　モデル諸元

形式		補剛桁橋
支間長	L(m)	58.995
ライズ	f(m)	9.36
補剛桁の断面積	$A_1(m^2)$	2.24×10^{-2}
扶助の断面積	$A_2(m^2)$	2.24×10^{-2}
曲げ剛性	EI(kN･m)	1.74×10^{4}
桁全重量	W_b(kN)	1.47×10^{3}
格間数		9

表ー2　固有振動数

次数	振動数(Hz)
1次	1.742
2次	2.558
3次	4.018
4次	6.355
5次	9.734
6次	13.62
7次	17.61
8次	20.76



図ー2　固有値解析による振動モード

3．振動特性推定法

1)ERA 法(The Eigensystem Realization Algorithm)

$\boldsymbol{x}(k)$ の共分散 $\boldsymbol{R}_x(k)=E[\boldsymbol{x}(k)\boldsymbol{x}(k)^T]$ より，観測値 $\boldsymbol{y}(k)$ の自己相関関数 $\boldsymbol{R}_{yy}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{C}^T=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}$ を用いると，ハンケル行列は次式から構成される．

$$\boldsymbol{H}(k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{yy}(k) & \boldsymbol{R}_{yy}(k+1) & \cdots & \boldsymbol{R}_{yy}(k+\beta-1)\\ \boldsymbol{R}_{yy}(k+1) & \boldsymbol{R}_{yy}(k+2) & \cdots & \boldsymbol{R}_{yy}(k+\beta)\\ \vdots & & & \vdots\\ \boldsymbol{R}_{yy}(k+\alpha-1) & \boldsymbol{R}_{yy}(k+\alpha-1) & \cdots & \boldsymbol{R}_{yy}(k+\alpha+\beta-1)\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}_\alpha\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{Q}_\beta\quad(2)$$

と表される．$\boldsymbol{P}_\alpha$ は可観測行列，$\boldsymbol{Q}_\beta$ は可制御行列である．(2)式において，$k=0$ の場合のハンケル行列を特異値分解すると，

$$\boldsymbol{H}(0)=\boldsymbol{P}_\alpha\boldsymbol{Q}_\beta=\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T=\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}^{1/2}\boldsymbol{S}^{1/2}\boldsymbol{V}^T\qquad(3)$$

となる． (2)式において，$k=1$ の場合について考えると，

$$\boldsymbol{H}(1)=\boldsymbol{P}_\alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_\beta\qquad(4)$$

となり，(2)，(3)式より，第 m 点までの観測点を E_m^T とすると，

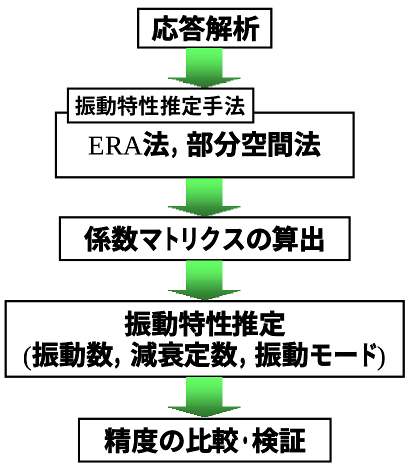
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}^{-1/2}\boldsymbol{H}(1)\boldsymbol{S}^{-1/2}\boldsymbol{V}^T=\boldsymbol{P}_\alpha^{-1}\boldsymbol{H}(1)\boldsymbol{Q}_\beta^{-1}\quad \boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}_m^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}^{1/2}\qquad(5)$$

2)部分空間法(サブスペース法)

速度応答より算出されたハンケル行列は，マルコフパラメータより，

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_0 & \cdots & \boldsymbol{y}_{N-1}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{y}_{2k} & \cdots & \boldsymbol{y}_{2k+N-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_p\\ \boldsymbol{Y}_f\end{bmatrix}\qquad(6)$$

と表される．$\boldsymbol{Y}_p$ は過去のデータ，$\boldsymbol{Y}_f$ は未来のデータである．また，



図ー3　同定の流れ

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{pp} & \boldsymbol{\Sigma}_{pf} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{fp} & \boldsymbol{\Sigma}_{ff} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_p \\ \boldsymbol{Y}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_p^T & \boldsymbol{Y}_f^T \end{bmatrix} \tag{7}$$

となることから，LQ 分解を考えると，

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_p \\ \boldsymbol{Y}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{L}_{21} & \boldsymbol{L}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1^T \\ \boldsymbol{Q}_2^T \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{pp} & \boldsymbol{\Sigma}_{pf} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{fp} & \boldsymbol{\Sigma}_{ff} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{L}_{21} & \boldsymbol{L}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_{11}^T & \boldsymbol{L}_{21}^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{L}_{22}^T \end{bmatrix} \tag{8}$$

次に共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_{ff}$， $\boldsymbol{\Sigma}_{pp}$ の平方根行列を求めると，

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ff} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T \ , \ \boldsymbol{\Sigma}_{pp} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T \tag{9}$$

となり，(9)式より $\boldsymbol{\Sigma}_{pf}$ の正規化された特異値分解を求める．

$$\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{pf}(\boldsymbol{M}^{-1})^T = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T \cong \boldsymbol{U}_s\boldsymbol{\Sigma}_s\boldsymbol{V}_s \tag{10}$$

拡大可観測および拡大可到達行列を以下のように定義すると，

$$\boldsymbol{O}_k = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}_s\boldsymbol{\Sigma}_s^{1/2} \ , \ \boldsymbol{C}_k = \boldsymbol{\Sigma}_s^{1/2}\boldsymbol{V}\boldsymbol{M}^T \tag{11}$$

(11)式より，

$$\boldsymbol{A} = \underline{\boldsymbol{O}}_k \backslash \overline{\boldsymbol{O}}_k \ , \ \boldsymbol{C} = \boldsymbol{O}_k(1:p,:) \tag{12}$$

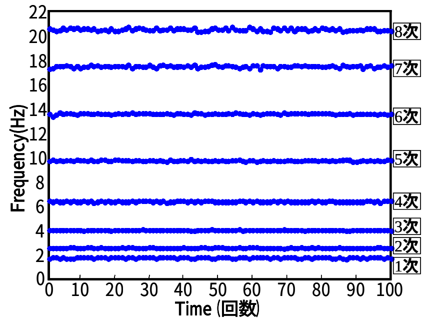
$\underline{\boldsymbol{O}}_k, \overline{\boldsymbol{O}}_k$ はそれぞれ $\boldsymbol{O}_k$ の下 p 行，および上 p 行を除いた行列である．(5)，(12)式より， $\boldsymbol{A}$ の固有値から固有値の X_{Re}， X_{Im} を用いて，次式から固有円振動数 ω_k， 減衰定数 h_k を推定できる．

$$\begin{aligned} h_k\omega_k &= (-1/\Delta)\ln\sqrt{X_{\mathrm{Re}}^2 + X_{\mathrm{Im}}^2} \\ \omega_k\sqrt{1-h_k^2} &= (1/\Delta)\tan^{-1}(X_{\mathrm{Im}}/X_{\mathrm{Re}}) \end{aligned} \tag{13}$$

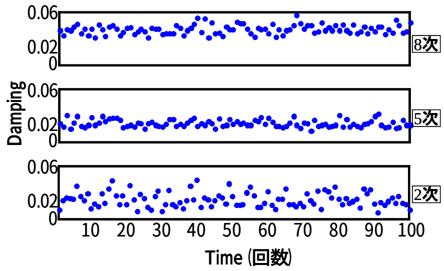
ここに， Δ はサンプリング時間である．

4．振動特性推定結果

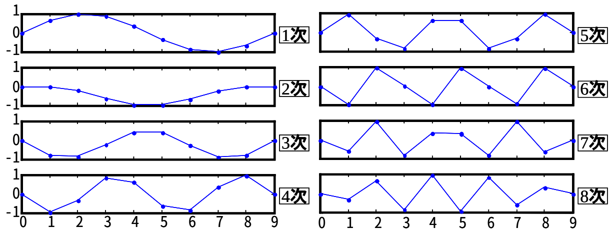
振動特性推定は， ERA 法，部分空間法ともに 30 秒間の速度応答データを 1 回区分として合計 100 回発生させて，振動数，減衰定数，振動モードの推定を行った．また，ERA 法，部分空間法ともに，桁部分である節点番号②~⑨の全点観測による推定を行った．部分空間法による振動数推定軌跡，減衰定数推定軌跡をそれぞれ図−4，図−5 に示す．図−5 の減衰定数推定軌跡は，2，5，8 次の推定結果である．これらの結果から，各次数における振動数と減衰定数が推定できていることが確認できる．また，図−6 は部分空間法により算出された合計 100 回の振動モードの平均値をプロットしたものである．固有値解析で求められた振動モードと比較してみると，全次数において良好に振動モードが推定できていることが確認できる．



図−4　部分空間法による振動数推定軌跡



図−5　部分空間法による減衰定数推定軌跡



図−6　部分空間法による振動モード

表−3　振動特性推定結果

ランガー		固有振動数(計算値)(Hz)	固有振動数(推定値)(Hz)			減衰定数		
			平均値(Hz)	標準偏差(Hz)	変動係数(%)	平均値	標準偏差	変動係数(%)
1次	ERA法	1.742	1.741	0.01651	0.9479	0.02714	0.01134	41.80
	部分空間法		1.741	0.01997	1.147	0.02415	0.01048	43.42
2次	ERA法	2.558	2.555	0.02144	0.8392	0.02501	0.007929	31.70
	部分空間法		2.557	0.02129	0.8324	0.02256	0.008366	37.07
3次	ERA法	4.018	4.018	0.02172	0.5404	0.02180	0.005767	26.46
	部分空間法		4.018	0.02055	0.5115	0.02038	0.005698	27.95
4次	ERA法	6.355	6.360	0.03228	0.5076	0.02212	0.005904	26.68
	部分空間法		6.359	0.02770	0.4356	0.02102	0.005178	24.64
5次	ERA法	9.734	9.719	0.05172	0.5321	0.02224	0.004434	19.94
	部分空間法		9.722	0.04607	0.4738	0.02151	0.004117	19.14
6次	ERA法	13.62	13.56	0.06664	0.4913	0.02303	0.004437	19.27
	部分空間法		13.56	0.05149	0.3796	0.02290	0.003972	17.35
7次	ERA法	17.61	17.46	0.1242	0.7117	0.02963	0.005763	19.45
	部分空間法		17.45	0.07724	0.4426	0.02940	0.004377	14.89
8次	ERA法	20.76	20.41	0.1704	0.8349	0.03936	0.007700	19.56
	部分空間法		20.49	0.09758	0.4763	0.04083	0.005238	12.83

次に，両手法における振動特性推定結果を表−3 に示す．この表から，両手法ともに振動数，減衰定数はほぼ同じ精度で推定できていることが確認できる．振動数において，両手法の推定振動数は固有振動数に近い精度が得られている．また，両手法ともに変動係数が約 1%前後と精度よく推定できている．減衰定数において，両手法ともに 1 次，7 次，8 次の低次と高次において，平均値が設定した値よりも高めの推定となっている．また，部分空間法では，高次になるに従って減衰定数のばらつきが小さくなるという結果が得られた．

5．まとめ

ERA 法，および部分空間法を用いて，ランガー橋モデルの振動特性推定を行い，その精度検証を行った．実現化手法による構造同定では，振動モードが比較的容易に推定できることを確認することができた．このことから，今後は，実橋において実測することで本手法の有効性を検証していきたい．

[参考文献]1) 片山 徹：システム同定，朝倉書店，2004.