# システム実現法による多入力構造同定システムの橋梁の振動特性推定への適用

長崎大学大学院　学生員　○大岩根健吾　　長崎大学工学部　フェロー　岡林隆敏
長崎大学工学部　正会員　奥松俊博　　福州大学土木建築工程学院　非会員　呉　慶雄

## 1.はじめに

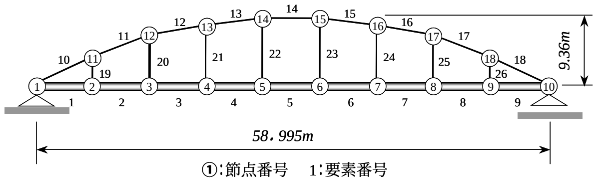
構造物の健全度評価を振動特性(振動数･減衰定数･振動モード)から評価するためには，微細な振動数変化を検出できるシステムが必要である．本研究では，システム実現法であるERA法[1)]，およびERA/DC法[1)]を用いて対象とする橋梁モデルの振動特性推定を行い，その精度の比較･検証を行った．

## 2.数値シミュレーション

対象橋梁モデルは補剛アーチ橋とし，平面骨組構造による構造モデルを図－1 に示す．このモデルの諸元を表－1 に，1～8 次までの鉛直振動の固有振動数を表－2 に示す．また，固有値解析による振動モードを図－2 に示す．離散系の状態方程式は次式で表される．

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(k)\quad \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) \tag{1}$$

本研究では節点番号②～⑨の鉛直方向に独立な白色雑音を与えた場合の応答シミュレーションを行った．着目点は対象橋梁の桁部分である，節点番号②～⑨の多点観測とし，数値解析法にはモード解析法を用いた．また，各振動次数のモード減衰は，$h_k=0.02$ とした．



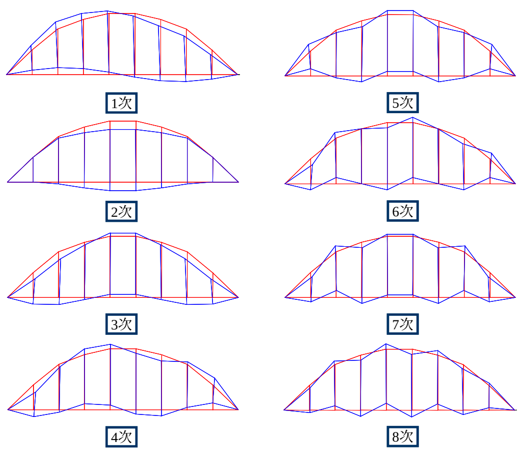

図－1　補剛アーチ橋

表－1　モデル諸元

| 形式 | | 補剛桁橋 |
|---|---|---|
| 支間長 | $L$ (m) | 58.995 |
| ライズ | $f$ (m) | 9.36 |
| 補剛桁の断面積 | $A_1$ (m²) | 2.24×10$^{-2}$ |
| 拱肋の断面積 | $A_2$ (m²) | 1.23×10$^{-2}$ |
| 曲げ剛性 | $EI$ (kN･m) | 1.74×10$^{4}$ |
| 桁全重量 | $W$ (kN) | 1.47×10$^{3}$ |
| 格間数 | | 9 |

表－2　固有振動数

| | 固有振動数 (Hz) |
|---|---|
| 1次 | 1.742 |
| 2次 | 2.558 |
| 3次 | 4.018 |
| 4次 | 6.355 |
| 5次 | 9.734 |
| 6次 | 13.616 |
| 7次 | 17.607 |
| 8次 | 20.763 |




図－2　固有値解析による振動モード

## 3.振動特性推定法

1) ERA 法(The Eigensystem Realization Algorithm)

本研究では，構造同定手法として，ERA 法，および ERA/DC 法を用いた．両手法における同定手法の流れを図－3 に示す．$\boldsymbol{x}(k)$ の共分散 $\boldsymbol{R}_x(k)=E\left[\boldsymbol{x}(k)\boldsymbol{x}(k)^T\right]$ より，観測値 $\boldsymbol{y}(k)$ の自己相関関数 $\boldsymbol{R}_{yy}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{R}_x\boldsymbol{C}^T=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}$ を用いると，Hankel 行列は次式から構成される．

$$\boldsymbol{H}(k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{yy}(k) & \boldsymbol{R}_{yy}(k+1) & \cdots & \boldsymbol{R}_{yy}(k+\beta-1)\\ \boldsymbol{R}_{yy}(k+1) & \boldsymbol{R}_{yy}(k+2) & \cdots & \boldsymbol{R}_{yy}(k+\beta)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{R}_{yy}(k+\alpha-1) & \boldsymbol{R}_{yy}(k+\alpha) & \cdots & \boldsymbol{R}_{yy}(k+\alpha+\beta-2)\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}_\alpha\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{Q}_\beta \tag{2}$$

と表される．$\boldsymbol{P}_\alpha$ は可観測行列，$\boldsymbol{Q}_\beta$ は可制御行列である．(2)式において，$k=0$ の場合の Hankel 行列を特異値分解すると，

$$\boldsymbol{H}(0)=\boldsymbol{P}_\alpha\boldsymbol{Q}_\beta=\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T=\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}^{1/2}\boldsymbol{S}^{1/2}\boldsymbol{V}^T \tag{3}$$

となる． $k=1$ の場合，(2)式は，

$$\boldsymbol{H}(1)=\boldsymbol{P}_\alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_\beta \tag{4}$$

となり，(3)，(4)式より，第 $m$ 点までの観測点を $E_m^T$ とすると，

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}^{-1/2}\boldsymbol{H}(1)\boldsymbol{S}^{-1/2}\boldsymbol{V}^T=\boldsymbol{P}_\alpha^{-1}\boldsymbol{H}(1)\boldsymbol{Q}_\beta^{-1}\quad C_m=\boldsymbol{E}_m^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}^{1/2} \tag{5}$$

2)ERA/DC 法(The ERA with Data Correlations)

Hankel 行列 $\boldsymbol{H}(k)$ を用いて，次式のようなデータ相関を考える．

$$\boldsymbol{R}_R(k)=\boldsymbol{H}(k)\,\boldsymbol{H}^T(0) \tag{6}$$


図－3　構造同定の流れ

$$
=\begin{bmatrix}
\sum_{i=0}^{\beta-1}\boldsymbol{R}_{yy}(k+i)\boldsymbol{R}_{yy}{}^{T}(i) & \cdots & \sum_{i=0}^{\beta-1}\boldsymbol{R}_{yy}(k+i)\boldsymbol{R}_{yy}{}^{T}(\alpha-1+i) \\
\vdots & & \vdots \\
\sum_{i=0}^{\beta-1}\boldsymbol{R}_{yy}(k+\alpha+i-1)\boldsymbol{R}_{yy}{}^{T}(i) & \cdots & \sum_{i=0}^{\beta-1}\boldsymbol{R}_{yy}(k+\alpha+i-1)\boldsymbol{R}_{yy}{}^{T}(\alpha-1+i)
\end{bmatrix}
$$

$$
=\boldsymbol{P}_{\alpha}\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{Q}_{c} \qquad (7)
$$

(7)式において $k=0$， $k=1$ の場合，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{R}}(0) &= \boldsymbol{H}(0)\boldsymbol{H}^{T}(0) = \boldsymbol{P}_{\alpha}\boldsymbol{Q}_{c} \\
\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{R}}(1) &= \boldsymbol{H}(1)\boldsymbol{H}^{T}(0) = \boldsymbol{P}_{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_{c}
\end{aligned} \qquad (8)
$$

となる． $R_{hh}(0)$ の特異値分解を考えると，

$$
\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{(0)} = \boldsymbol{P}_{\alpha}\boldsymbol{Q}_{c} = \boldsymbol{USV}^{T} = \boldsymbol{US}^{1/2}\boldsymbol{S}^{1/2}\boldsymbol{V}^{T} \qquad (9)
$$

(8)，(9)式より，観測点を $E_m^T$ とすると，

$$
\boldsymbol{A} = \boldsymbol{US}^{-1/2}\boldsymbol{R}_{R}\boldsymbol{(1)}\boldsymbol{S}^{-1/2}\boldsymbol{V}^{T} = \boldsymbol{P}_{\alpha}^{-1}\boldsymbol{R}_{R}\boldsymbol{(1)}\boldsymbol{Q}_{c}^{-1} \quad \boldsymbol{C}_{m} = \boldsymbol{E}_{m}^{T}\boldsymbol{US}^{1/2} \qquad (10)
$$

(5)，(10)式より， $\boldsymbol{A}$ の固有値から固有値の実数部分 $X_{\mathrm{Re}}$ と虚数部分 $X_{\mathrm{Im}}$ が求められる． $X_{\mathrm{Re}}$， $X_{\mathrm{Im}}$ を用いて， $\Delta$ をサンプリング時間とすると，次のように固有円振動数 $\omega_k$， 減衰定数 $h_k$ が得られる．

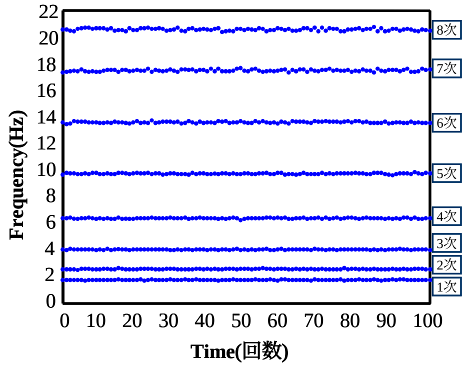
$$
\begin{aligned}
h_k\omega_k &= (-1/\Delta)\ln\sqrt{X_{\mathrm{Re}}^2 + X_{\mathrm{Im}}^2} \\
\omega_k\sqrt{1-h_k^2} &= (1/\Delta)\tan^{-1}(X_{\mathrm{Im}}/X_{\mathrm{Re}})
\end{aligned} \qquad (11)
$$

## 4.振動特性推定結果

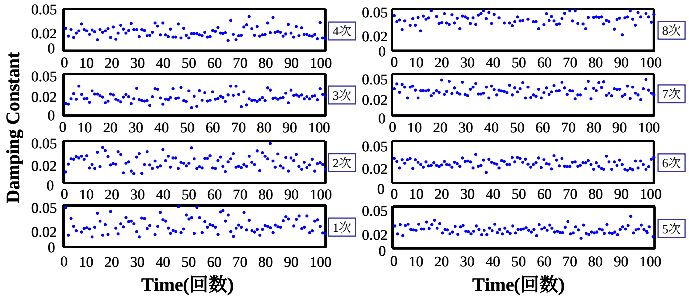
振動特性推定は，30 秒間の常時微動データを 1 回区分として，ERA 法，および ERA/DC 法により合計 100 回行った. ERA 法による合計 100 回の振動数推定軌跡，減衰定数推定軌跡をそれぞれ図−4，図−5 に示す．これらの結果より，全次数において，振動数，減衰定数の推定ができていることが確認できる．

図−6 に，ERA 法により推定された合計 100 回の振動モードの平均値を示す．図−2 に示した，固有値解析による振動モードの桁部分と比較すると，推定手法における振動モード推定が実現できている．

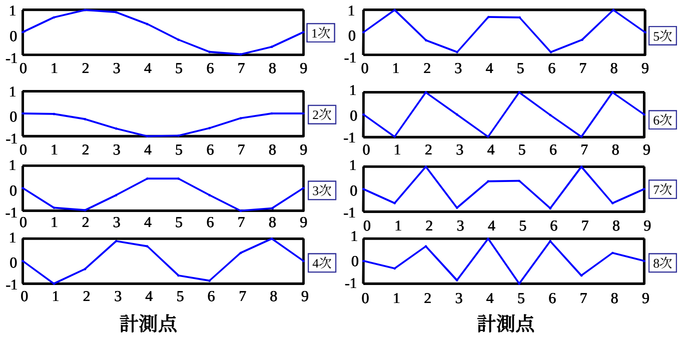
次に，両手法における振動特性推定結果を表−3 に示す．この表より，振動数，減衰定数ともに両手法は同程度の推定精度であることが分かる．振動数に着目してみると, 両手法とも全次数において変動係数が 1% 未満と精度良く推定できている．減衰定数に着目してみると, 1 次の変動係数が高く,ばらつきが若干大きい. また，7 次，8 次の高次において，平均値が設定値よりも高めの推定となっている．




図−4　ERA 法による振動数推定軌跡




図−5　ERA 法による減衰定数推定軌跡




図−6　ERA 法による振動モード推定

表−3　振動特性推定結果

| 補剛アーチ橋 | | 固有振動数(Hz) | | | 減衰定数 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 平均値(Hz) | 標準偏差(Hz) | 変動係数(%) | 平均値 | 標準偏差 | 変動係数(%) |
| 1次 | ERA法 | 1.741 | 0.01651 | 0.9479 | 0.02714 | 0.01134 | 41.80 |
| | ERA/DC法 | 1.741 | 0.01657 | 0.9518 | 0.02703 | 0.01118 | 41.34 |
| 2次 | ERA法 | 2.555 | 0.02144 | 0.8392 | 0.02501 | 0.007929 | 31.70 |
| | ERA/DC法 | 2.555 | 0.02141 | 0.8379 | 0.02502 | 0.008012 | 32.02 |
| 3次 | ERA法 | 4.018 | 0.02172 | 0.5404 | 0.02180 | 0.005767 | 26.46 |
| | ERA/DC法 | 4.019 | 0.02179 | 0.5422 | 0.02187 | 0.005781 | 26.43 |
| 4次 | ERA法 | 6.360 | 0.03228 | 0.5076 | 0.02212 | 0.005904 | 26.68 |
| | ERA/DC法 | 6.360 | 0.03201 | 0.5034 | 0.02214 | 0.005917 | 26.73 |
| 5次 | ERA法 | 9.719 | 0.05172 | 0.5321 | 0.02224 | 0.004434 | 19.94 |
| | ERA/DC法 | 9.719 | 0.05191 | 0.5341 | 0.02224 | 0.004437 | 19.96 |
| 6次 | ERA法 | 13.56 | 0.06664 | 0.4913 | 0.02303 | 0.004437 | 19.27 |
| | ERA/DC法 | 13.56 | 0.06662 | 0.4912 | 0.02304 | 0.004464 | 19.38 |
| 7次 | ERA法 | 17.46 | 0.1242 | 0.7117 | 0.02963 | 0.005763 | 19.45 |
| | ERA/DC法 | 17.46 | 0.1243 | 0.7121 | 0.02965 | 0.005797 | 19.55 |
| 8次 | ERA法 | 20.41 | 0.1704 | 0.8349 | 0.03936 | 0.007700 | 19.56 |
| | ERA/DC法 | 20.41 | 0.1712 | 0.8387 | 0.03937 | 0.007735 | 19.65 |

## 5.まとめ

ERA 法，および ERA/DC 法を用いて，対象橋梁の振動特性推定を行い，その精度検証を行った．両手法の振動特性推定精度は，振動数，減衰定数ともにほぼ同精度であることが確認できた．また，実現化手法による構造同定では，振動モードの推定が可能であることが確認できた．今後は，実橋計測を行うことで，本手法の有効性を検証したい．

[参考文献]1）Jer-Nan Juang：Applied System Identification，Prentice Hall，1993．11