いずれが本物の弾性係数か？

琉球大学工学部環境建設工学科　正会員　仲座　栄三

１．はじめに

歴史書などを調べてみると，19 世紀の初頭から一世紀余もの間，等方性弾性体の弾性係数は 1 つかあるいは 2 つかの論争が巻き起こっている．

Navier や Poisson，それに Cauchy らは，弾性係数は 1 つであるとする単一係数派に属している．一方，Green および，後の物理学者の多くは，弾性係数は 2 つであるとする学派を支持している．[1)]

現在，我々は，等方弾性体の弾性係数は一般に２つであるとする立場にある．その弾性係数として，ヤング率Yとポアソン比n，体積弾性係数Kとせん断弾性係数G，あるいは Lamé の第一および第二係数の組み合わせで与えられる 2 つの係数が挙げられる．

ここでの議論の主目的は，上に挙げた合計 6 つの弾性係数の内でいずれが本物の（物理的に定義づけられる）弾性係数となりえるのかを検討することにある．

２．Hookeの法則と弾性係数

Poisson は，当初，弾性係数は 2 つであるとする立場をとったものの，後に，殆どの材料に対し，ポアソン比が一定値（$n=1/4$）となっていることを指摘し，弾性係数はただ１つであるとする主張を行っている．[1)]

Poisson の後，多くの物理学者らは詳細な実験を行い，2 つの係数を用いる方が実験値との整合性が良いことを指摘し，Poisson の主張は誤りであると指摘している．

以下，棒の縦軸方向一軸試験を対象に，弾性係数が物理的にいかように定義されるかの議論を行う．また，話を単純にするため，現象を二次元とする．

棒の軸方向（縦方向）に対し，Hooke の法則は次のように書ける．

$$s_1 = Ye_1 \qquad (1)$$

等方場にあっては，物理法則はまったく同じ形式に書けなければならないので，横方向に対しても，Hooke の法則は次のように書けなければならない．

$$s_2 = Ye_2 \qquad (2)$$

ここに，s_1およびs_2はそれぞれ縦方向および横方向の内部応力，e_1およびe_2はそれぞれ縦方向および横方向の歪みを表す．

だが，式（２）に示す関係は，実際の歪みと応力の関係を正しく表せない．なぜなら，棒の一軸引張に対し，荷重が作用しない横方向にあっても棒の歪みは生じるからである．

ここで，Poisson はポアソン比を導入し，次なる関係式を横方向の関係式として提案している．

$$s_2 - ns_1 = Ye_2 \qquad (3)$$

ここに，左辺第二項は Poisson が与えた補正項であり，ポアソン効果に関わる項である．

ところで，Hooke の法則を表す式（１）と式（３）とでは，同形でなく，したがってこれらは客観的な法則を表す式になりえない．

これに対し，式（１）の左辺に，$-ns_2$があるものの，この場合，$s_2 = 0$なので，書く必要がない．したがって，式（１）と式（３）は同形をなすとの主張がなされそうだが，次のように反論される．

式（３）の左辺第二項はポアソン効果を表すために導入された補正項である．式（１）にはそれが現れていない．等方性材料を考えるとき，その補正項はいかなる方向にあってても等しく現れていなければならないはずである．式（３）の関係を正しいとするなら，式（１）においても補正項として同値である$-ns_1$が現れていなければならない．

すなわち，式（３）を妥当なものとするなら，式（１）も次のように修正され，このときポアソン効果が等方的なものとなる．

$$s_1 - ns_1 = Ye_1 \qquad (1')$$

等方場において，物理法則は，いかなる方向にあっても同じ形式に書ける必要がある．そのことを満たすように，式（1）と（3）をまず次のように書き換えてみる．

$$(1+n)s_1 - n(s_1+s_2) = Ye_1 \qquad (4)$$

$$(1+n)s_2 - n(s_1+s_2) = Ye_2 \qquad (5)$$

さらに変形し

$$(1+n)\left[s_1 - \frac{n}{1+n}(s_1+s_2)\right] = Ye_1 \qquad (6)$$

$$(1+n)\left[s_2 - \frac{n}{1+n}(s_1+s_2)\right] = Ye_2 \qquad (7)$$

あるいは

$$s_1 - \frac{n}{1+n}(s_1+s_2) = \frac{Y}{1+n}e_1 \qquad (8)$$

$$s_2 - \frac{n}{1+n}(s_1+s_2) = \frac{Y}{1+n}e_2 \qquad (9)$$

を得る．ここに，左辺第二項はポアソン効果による補正項を表し，等方性を有する．

式（8）および式（9）に示す式形は，どの方向に対しても同じ式形を有し，したがって“客観的”な関係式となっている．しかしながら，それらは式（1）および式（3）を単に変形したに過ぎず，式（1）および式（3）と同等である．にもかかわらず，式（8）および（9）は，Hooke の法則および弾性係数の定義に関し，以下のような重要な解釈を与える．

まず，式（8）および（9）は，応力（左辺）と歪み（右辺）とが線形比例関係にあることを表すものの，“内部応力から左辺第二項に示すポアソン効果に関わる応力を差引いた応力が歪みと線形関係にある”ことを示している．そのとき，比例係数（すなわち，弾性係数）は単にヤング率でなく，それを$(1+n)$で除した値が弾性係数となりうることを示すものとなっている．

ここで，内部応力からポアソン効果に関わる応力を差引いた応力をtなる記号で表わすなら，式（8）および（9）の一般式は次のように表される．[2)]

$$t_i = 2Ge_i \quad (i=1,2) \qquad (10)$$

ここに

$$2G = Y/(1+n) \qquad (11)$$

である．

バネに対する Hooke の法則をベクトル成分表示で表すなら

$$f_i = kx_i \quad (i=1,2) \qquad (12)$$

と書ける．ここに，kはバネ係数である．

等方弾性体に対する応力と歪みの関係式（10）は，明らかに式（12）に示す Hooke の法則と同義をなす．したがって，式（10）を以って等方弾性体の Hooke の法則の一般化と言える．このとき，客観的に定義される弾性係数は，ヤング率でなく，式（12）に示す係数G，いわゆるせん断弾性係数でなければならない．[2)]

ヤング率が客観的な弾性係数となりえないのは，式（1）はともかくとしても式（2）が正しい関係式を与えないことから明らかである．さらに，ポアソン比は歪み比を表す無次元係数であり，弾性係数でない．したがって，2つの弾性係数がヤング率とポアソン比という言い方も正しくない．すなわち，ヤング率とポアソン比は，実験的に容易に求められる係数であっても，物理的に定義される弾性係数とはなりえないのである．

式（10）が等方弾性体の Hooke の法則を表すものである．したがって，Hooke の法則に関わる弾性係数はただ1つであり，それが係数Gで与えられる．したがって，係数Gは単に弾性係数と呼ばれることが推奨される．

3．おわりに

等方弾性体の Hooke の法則は，内部応力そのものでなく，内部応力からポアソン効果に関わる等方応力を差引いた応力と歪みの間に成立する．その関係に現れる弾性係数ただ 1 つが物理的に定義される弾性係数である．

それでは，ポアソン効果の物理とは何か？それが Hooke の法則に規定され，ポアソン効果にもう 1 つの弾性係数が現れやしないか？さらに詳しい説明は，講演時に行う予定である．

参考文献

1）S.P. Timoshenko: History of Strength of Materials, Dover Publications, Inc., New York, 1983.
2）仲座栄三：物質の変形と運動の理論，ボーダインク，437p.，2005.