

3次元グリーン公式を用いた構造物と波の干渉問題解析法の開発

九州大学大学院 学生員 迫田 史顕 金 相昊
九州大学大学院 正会員 吉田 明德 山城 賢

1. はじめに

近年、沿岸域の利用が浅海域から沖合へと拡大しており、この傾向は今後さらに強まるものと考えられ、その際には、構造物と波の干渉を含め、波動場をより広域にかつ正確に把握できる数値解析法が必要である。以上の観点から、当研究室ではこれまでに BEM(境界要素法)と VOF を結合した断面 2 次元波動場解析法の開発に取り組んでおり、VOF 単独による計算と同等の精度でかつ計算時間を格段に短縮できることを確認している¹⁾。しかしながら、実際の海域で生じる現象のほとんどは 3 次元であることから、BEM と VOF の結合解析法をより実用的な波動場解析法にするためには、3 次元問題へ拡張する必要がある。本研究ではまずその第一段階として 3 次元 BEM に関して、水深一定を仮定した外海域では 2 次元 BEM を、不等水深の海域では 3 次元 BEM で速度ポテンシャルを表し、両者を境界で結合することによって解くという方法を試みた。

2. 理論解析の概略

図 1 に示すように、一定水深の海域に部分的に海底の隆起部を有し、かつその上に構造物がある場合を考え、 (x, y) 軸を静水面上にとり、鉛直上方に z 軸をとるものとする。この構造物に対して、 x 軸と角度 θ をなす任意の方向より入射する微小振幅規則波が、海底の隆起および構造物との干渉によって変形を受ける場合を考える。流体運動は、非圧縮非粘性流体の非回転運動と仮定すると、流体運動に関して次の速度ポテンシャルが存在する。

$$\Phi(x, y, z; t) = \frac{g\zeta_0}{\sigma} \phi(x, y, z) e^{-i\sigma t} \quad (1)$$

上式で、 g は重力加速度、 ζ_0 は入射波の振幅、 σ は入射波の角周波数、 $\phi(x, y, z)$ はポテンシャルの空間的な変動を表す無次元の複素関数で、ラプラス方程式を満足する。流体域を、不等水深部分を囲む円柱状の領域 (1) と、その外側の一定水深の領域 (2) とに分割することとし、領域 (1) の境界面に関して水面を S_F 、海底面を S_B 、構造物の表面を S_S 、領域 (1) と (2) の境界面を S_C で表す。また、水面境界 S_F の外周である境界線を Γ で表す (図 2 参照)。

まず領域 (2) について考える。領域 (2) の速度ポテンシャル $\phi_2(x, y, z)$ は、入射波のポテンシャル関数 $\phi_I(x, y, z)$ と領域 (1) からの散乱波を表すポテンシャル関数 $\phi_s(x, y, z)$ の

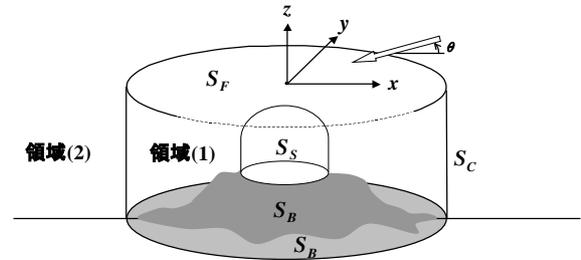


図 1: 計算領域の定義図

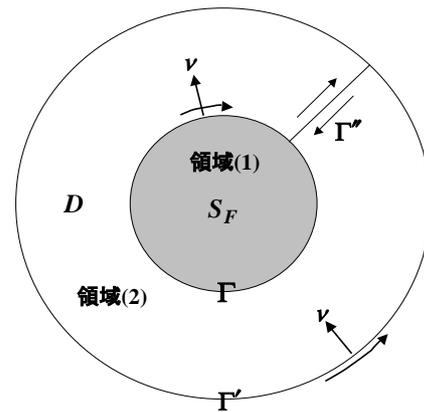


図 2: 計算領域の定義図 (平面図)

和で表せるものとする。

$$\phi_2(x, y, z) = \phi_I(x, y, z) + \phi_s(x, y, z) \quad (2)$$

領域 (2) は一定水深の海域であることから、散乱波のポテンシャル $\phi_s(x, y, z)$ は $\phi(x, y, z) = \varphi(x, y)Z(z)$ の形で表されると仮定し、ラプラス方程式に代入すると、 $\varphi(x, y)$ は次のヘルムホルツの方程式を満足すべき関数である²⁾。

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} \pm k_n^2 \varphi_n(x, y) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

ただし上式で符号 + の場合は $n = 0$ の場合、符号 - は $n \neq 0$ の場合に対応し、 k_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) は分散方程式により求められる固有値で、 k_0 は入射波の波数 k を意味する。領域 (2) における散乱波のポテンシャル $\phi_s(x, y, z)$ は次式のように表される²⁾。

$$\phi_s(x, y, z) = \varphi_0(x, y) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x, y) \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \quad (4)$$

$\varphi_0(x, y)$ については, 図 2 に示す閉領域 D に対して, グリーンの定理を適用し, k_0 に対する式 (3) の基本解であるハンケル関数 $H_0^{(1)}(kr)$ を用いることによって, 最終的に次の積分方程式を得ることができる²⁾.

$$\varphi_0(x, y) = \frac{i}{\alpha} \int_{\Gamma} \left\{ \varphi_0(x_b, y_b) \frac{\partial H_0^{(1)}(kr)}{\partial \nu} - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial \varphi_0(x_b, y_b)}{\partial \nu} \right\} ds \quad (5)$$

上式で i は虚数, ds は微小線要素, (x, y) は開領域 D 上の任意の点で, (x_b, y_b) は境界上の点を意味し, ν は境界線 Γ 上の外向き法線, r は (x, y) と (x_b, y_b) 間の距離で, 積分方向は反時計回りにとるものとする. また, 上式中の α は, (x, y) が境界上の点である場合は 2 をとり, 領域 (2) 内の点である場合は 4 をとる定数である.

同様に, $\varphi_n(x, y)$ については, k_n ($n = 1, 2, \dots$) に対する式 (3) の基本解である変形ベッセル関数 $K_0(k_n r)$ を用いることによって次の積分方程式を得る²⁾.

$$\varphi_n(x, y) = \frac{1}{\beta} \int_{\Gamma} \left\{ \varphi_n(x_b, y_b) \frac{\partial K_0(k_n r)}{\partial \nu} - K_0(k_n r) \frac{\partial \varphi_n(x_b, y_b)}{\partial \nu} \right\} ds \quad (6)$$

上式で, β は点 (x, y) が境界上の点であるときは π , 領域内の点であるときは 2π をとる定数である.

次に領域 (1) について考える. 領域 (1) の任意点 (x, y) における速度ポテンシャルを $\phi_1(x, y, z)$ で表す. ϕ_1 はラプラスの方程式を満足すべき関数である. 3次元グリーン定理と3次元領域のラプラス方程式の基本解である $1/r$ を用いると, 領域内の任意点のポテンシャルは, 次の積分方程式によって表される²⁾.

$$\phi_1(x, y, z) = -\frac{1}{\lambda} \int_S \int_S \left\{ \phi_1(x_b, y_b, z_b) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \nu} \phi_1(x_b, y_b, z_b) \right\} dA \quad (7)$$

ただし, dA は微小面要素, S は領域 (1) の全境界面を意味し, $S = S_F + S_B + S_S + S_C$ である. また, λ は点 (x, y, z) が境界面上にある場合は 2π をとり, 領域内にあるときは 4π をとる定数である.

3. 数値計算法

図 3 に示すように, 領域 (1) の境界面 S_F, S_C, S_B, S_S を四辺形あるいは三角形の面要素 ΔA_j に分割し, また, S_F の境界線 Γ を線要素 ΔS_j に分割する. 分割の個数を S_F, S_C, S_B, S_S に関して, N_1, N_2, N_3, N_4 個, また Γ に関して M_1 個に分割する. 面要素の形状は, 三角形か四辺形のいずれかに分割するが, 境界面 S_C 上の面要素に関しては矩形要素にとるものとし, 水平方向の辺の大きさおよびその位置は, Γ 上の線要素と一致させ, 水深方向には M_2 個に分割し, 境界面 S_C 全体で $M_1 \times M_2 (= N_2)$ 個となるように分割する.

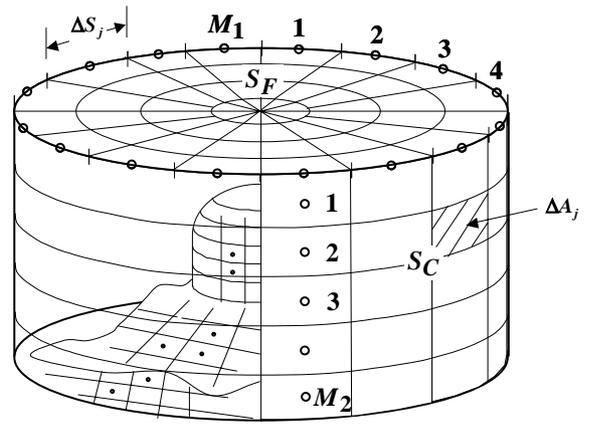


図 3: 境界面の要素分割

まず, 領域 (2) の散乱波のポテンシャルを表す式 (5), (6) では, 要素 ΔS_j 上のポテンシャル値は一定と仮定し, その値を中心での値で代表させ, 3次元のグリーン公式 (7) では, 面要素 ΔA_j 上で ϕ の値は一定で, ΔA_j の図心での値で代表させることとし, それぞれの積分方程式を離散化する.

次に, 境界条件として, 領域 (1) と領域 (2) の境界面 S_C では流体運動の連続条件, 水面境界 S_F では微小振幅波の水面境界条件, 水底面 S_B および構造物表面 S_S は不透過面より成るといふ条件をそれぞれ仮定すると, ϕ_1 と φ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) に関する連立一次方程式が得られる. ここで, 散乱波に関する級数項 n の打ち切り項数を n^* とし, $M_2 = n^* + 1$ とすることにより, この連立方程式を解くことができ, 境界上のポテンシャル ϕ_1 と φ_n が求まる. これら境界上のポテンシャル値を用いて, 式 (5), (6) から領域 (2) の任意点での散乱波のポテンシャル値が求められ, 式 (2) から領域 (2) の任意点でのポテンシャル値 $\phi_2(x, y, z)$ が求まる. また, 式 (7) から領域 (1) 内の任意点でのポテンシャル値 $\phi_1(x, y, z)$ が求まる.

4. おわりに

本文では, 定常問題としての解析法を述べたが, 3次元VOFとの結合には, BEMにおいても非定常解析を行うことが必要である. ただし, 3次元問題では2次元問題に比べると構造物との干渉による擾乱は構造物から離れると急激に減少することから, 強非線形解析法ではなく, 2次のオーダーまでの非定常解析法を用いることを考えている. なお, 具体的な解析結果は講演時に述べる予定である.

参考文献

- 1) エン 曙光・山城 賢・吉田明徳・入江 功 (2004): BEM と VOF の結合解析法による構造物近傍波動場の解析 海岸工学論文集, 第 51 巻, pp.31-35
- 2) 土木学会 (1994): 海岸波動 - 波構造物地盤の相互作用の解析法 - pp.340-349