

周波数応答解析を用いた Newmark 法の時間刻みによる誤差評価についての考案

長崎大学大学院 学生会員 平 貴子

長崎大学工学部 フェロー 岡林 隆敏

長崎大学工学部 正会員 呉 慶雄

1. はじめに

構造物の振動応答シミュレーションにおいて、高次振動数領域の解析を行う場合、無条件安定な Newmark 法が用いられるが、時間刻みの設定により高次振動成分に誤差が生じることが知られている。本研究では、長崎県に架設されている西海橋を対象橋梁とし、Newmark 法の時間刻みによる誤差評価法を考案したものである。そこで、Newmark 法により離散化された場合の周波数応答関数を用い、時間刻みの設定による誤差の影響を考慮し、周波数応答関数による高次振動成分の誤差評価法の確立を行うことを試みた。

2. 対象橋梁と走行車両の諸元

図 - 1 に対象橋梁として用いる西海橋の一般図を、図 - 2 に車両の 4 自由度系モデルを、表 - 1 に車両諸元を示す。

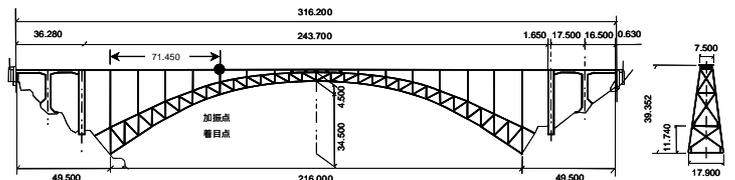


図 - 1 西海橋一般図 (単位: m)

3. 周波数応答関数

1) 連続系による周波数応答関数

連続系で記述された運動方程式は、次式で表される。

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = f(t) \tag{1}$$

(1)式の両辺をラプラス変換し、連続系の周波数応答関数を求めると、次式となる。

$$H(s) = (Ms^2 + sC + K)^{-1} \quad (s = i\omega) \tag{2}$$

2) Newmark 法による周波数応答関数

Newmark 法による変位、速度、加速度は次式で表される。

$$y_{n+1} = y_n + \dot{y}_n h + (1/2 - \beta)\ddot{y}_n h^2 + \beta\ddot{y}_{n+1} h^2 \tag{3}$$

$$\dot{y}_{n+1} = \dot{y}_n + (\ddot{y}_n + \ddot{y}_{n+1})h/2 \tag{4}$$

$$\ddot{y}_{n+1} = (M + Ch/2 + \beta Kh^2)^{-1} \tag{5}$$

$$[-Ky_n - (C + Kh)\dot{y}_n - \{Ch/2 + K(1/2 - \beta)h^2\}\ddot{y}_n + f_{n+1}]$$

この式を用いて、 y_{n+1} と \dot{y}_{n+1} を $y_n, \dot{y}_n, \ddot{y}_n$ で表し、ベクトル表示すると次式が得られる。ただし、 $\beta = 1/4$ とした。

$$Y_{n+1} = AY_n + Bf_{n+1} \tag{6}$$

ここで、 $Y_n = [y_n \ \dot{y}_n \ \ddot{y}_n]^T$, A は応答についての係数マトリクス、 B

は外力についての係数マトリクスである。時間進み演算子を Z とし、(6)式より次式を得る。

$$Y_n = (ZI - A)^{-1} Bf_{n+1} \tag{7}$$

(7)式の外力 f_{n+1} の係数が周波数応答関数であり、 $Z = e^{i\omega h}$ とおくと次式が得られる。

$$H(i\omega) = (e^{i\omega h} I - A)^{-1} B \tag{8}$$

4. 車両が走行する橋梁¹⁾の周波数応答関数

車両が走行中である橋梁の運動方程式は次式で表される。ここに $b(t)$ は車両設置位置を表すベクトルである。

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = F(t) = -b(t)F_v(t) \tag{9}$$

次に、橋梁上を走行する 4 自由度車両の運動方程式は次式で表される。

$$M_v \ddot{z}(t) + C_v \dot{z}(t) + K_v z(t) = F_v(t) \tag{10}$$

上式より橋梁 車両系の運動方程式は次式となる。また、 $r(t)$ は、 $r(t)$ と $\dot{r}(t)$ から構成されるベクトルである。

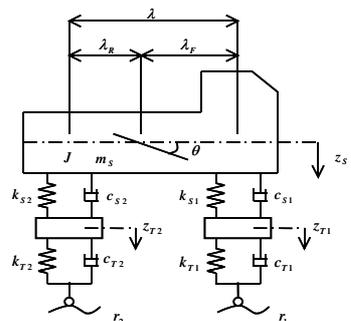


図 - 2 4 自由度車両モデル

表 - 1 車両諸元

| | |
|------------------------------|---------|
| 総重量 (kN) | 196.00 |
| ばね上 ばね定数前輪 K_{S1} (kN/m) | 1176.00 |
| ばね上 ばね定数後輪 K_{S2} (kN/m) | 4704.00 |
| ばね上 減衰係数前輪 C_{S1} (kN·s/m) | 4.90 |
| ばね上 減衰係数後輪 C_{S2} (kN·s/m) | 19.60 |
| ばね下 ばね定数前輪 K_{T1} (kN/m) | 2352.00 |
| ばね下 ばね定数後輪 K_{T2} (kN/m) | 9408.00 |
| ばね下 減衰係数前輪 C_{T1} (kN·s/m) | 5.88 |
| ばね下 減衰係数後輪 C_{T2} (kN·s/m) | 23.52 |

$$M_x \ddot{X}(t) + C_x \dot{X}(t) + K_x X(t) = F_x r(t) \tag{11}$$

(11)式を Newmark 法により(7)式と同様に表すと、次式のようになる。

$$Y_n = (ZI - A)^{-1} BF_x r(t) \tag{12}$$

3の2)と同様に時間進み演算子Zを用い、 $Z = e^{i\omega h}$ とすると、次式が得られる。

$$H(i\omega) = (e^{i\omega h} I - A)^{-1} BF_x \tag{13}$$

5. 数値計算結果と考察

図 - 3は連続系と Newmark 法による周波数応答関数である。なお、加振点と着目点は、図 - 1に示した。図 - 3 a), b)に Newmark 法の時間刻みを $t=0.01, 0.001(sec)$ とした場合をそれぞれ示す。実線は連続系、破線は Newmark 法を表している。

$t=0.01(sec)$ の場合6Hz付近までは良い一致が見られているが、それ以降の高周波数領域では、Newmark 法の場合、周波数の高い領域に誤差が拡大している。それに対し、 $t=0.001(sec)$ の場合、20Hzまで良い一致を示している。

図 - 4は時間刻みによる応答値の変化を示したものである。a)は2, 4, 6, 8Hzについての周波数応答関数の絶対値を時間刻み $t = 0.01(sec)$ から $t = 0.001(sec)$ に変化させて示したものである。b)では周波数応答関数の虚部のみを示した。a)の場合に比べてb)の場合の方が、時間刻みが小さくなるにつれ、連続系の値に収束する状況が表現できている。

図 - 5は、時間刻みを $t = 0.01(sec)$ から $t = 0.001(sec)$ に変化させた場合の2, 4, 6, 8Hzの点の周波数応答(虚部)の変化を示したものである。時間刻みを小さくすると、応答値は一定の値に収束している。図 - 6は、図 - 5の時間刻み間の差を相対誤差として表示したものである。これより、変化が少なくなった状態を最適な刻みを考えることができる。

6. まとめ

Newmark 法($\beta = 1/4$)は無条件安定な解法であるので、時間刻み t に係わりなく解を求めることができる。しかし、道路橋交通振動解析において、高次振動を計算する場合、時間刻みを適切に取らなければ誤差が発生する。そこで、周波数応答関数を用いることにより、位相遅れを表している虚部に着目し、時間刻み t による解析誤差の評価が、本手法で可能であることを確認した。

[参考文献] 1)岡林, 岡谷, 呉: 路面凹凸のモデル化と不規則振動による道路橋交通振動加速度応答解析, 構造工学論文集 Vol.47A, pp411-418, 2001.3

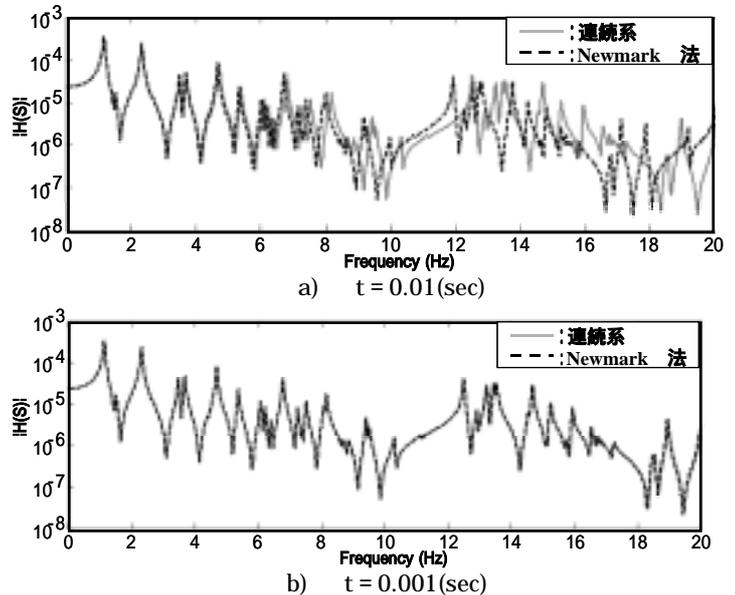


図 - 3 周波数応答関数

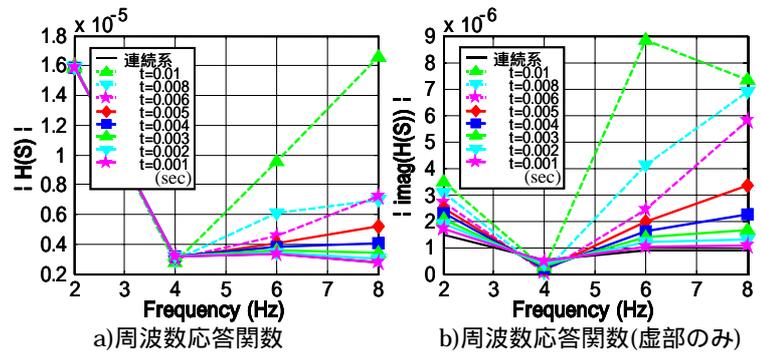


図 - 4 時間刻みによる応答値の変化

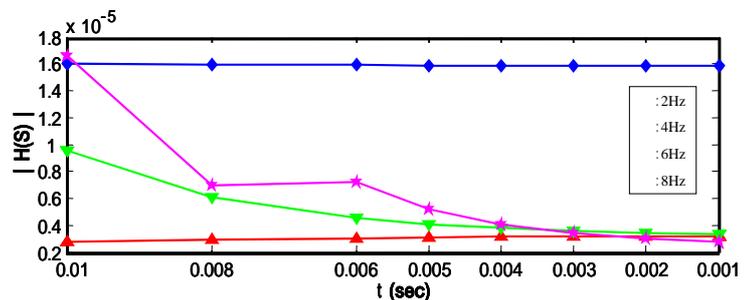


図 - 5 周波数別による比較

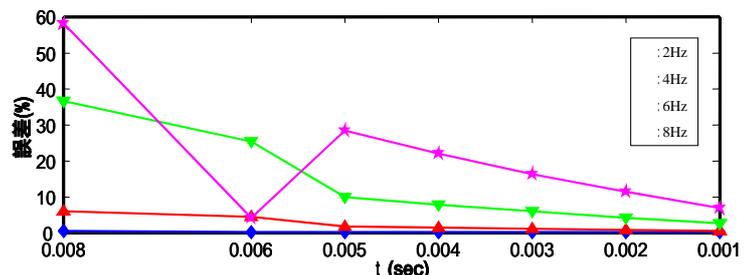


図 - 6 周波数別における誤差の変化