

摂動法による円筒形水槽内容液の水平方向非線形振動の解析

正会員 高 西 照 彦

清水建設 和泉研究室 正会員 若 原 敏 裕

1. まえがき 図 - 1 に示すような円筒形 T L D (同調液体ダンパー) 内容液の水平方向非線形振動に対する等価振動系の解析的な定式化を考えると、その手掛りとなる基礎的な資料を得るために、手始めとして、本論では摂動法を用いて円筒形水槽内容液の非線形振動の解析を行った。内容液の非線形振動に対する要因分析を行うためには、円筒容器の大きさ、加振振幅等の条件をいろいろ変えた場合について数多くの数値計算が必要である。有限要素法等による計算法では、1 ケースの応答計算に非常に多くの計算時間を必要とするという難点がある。摂動法によればその計算時間は全く問題にならない程少なくて済むという利点がある。ここでは、摂動法を用いて水平方向の調和加振を受ける円筒形水槽内容液の非線形振動数特性

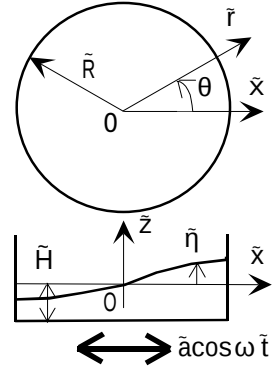


図 - 1 円筒形水槽及び座標系

を求めるための理論式を示し、数値計算を行って、得られた結果を既存の実験結果^{1), 2)}と比較した。

2. 基礎方程式 流体運動を支配する基礎方程式及び境界条件についてはよく知られているので、それについて記述することは省略する。ただ、力学的条件式中に、次式に示す様に速度ポテンシャルに比例する減衰項を導入した。

$$\ddot{\tilde{\varphi}}_t + (1/2) \{ (\ddot{\tilde{\varphi}}_r)^2 + (\ddot{\tilde{\varphi}}_\theta / \tilde{r})^2 + (\ddot{\tilde{\varphi}}_z)^2 \} + g \ddot{\tilde{\eta}} + 2h_w \omega_{11} \dot{\tilde{\varphi}} - \tilde{r} \ddot{\tilde{a}} \omega^2 \cos \theta \cos \omega t = 0 \quad (1)$$

ここに、 $\tilde{\eta}$ は波高、 g は重力の加速度、 h_w は減衰定数である。 ω_{11} は内容液の r, θ 方向に対する (1,1) モードの固有円振動数である。また、下付き添字は微分を表す。

3. 基礎方程式の無次元化と摂動解 基礎方程式と境界条件式において、以下に示すような無次元化を行う。 $t = \omega \tilde{t}$, $\tilde{R} = \mu_{11} R$, $\tilde{H} = H R$ 。ここに、 μ_{11} は $J_1'(\mu_{11}) = 0$ を満たす定数で、 $\mu_{11} = 1.8411 \dots$ である。また、摂動項としては、 $\tilde{a}/R$ を小さいとして $\varepsilon = \tilde{a}/R$ を採用し、水深についてはそれは浅く、振動数については $\omega = \omega_{11}$ 近傍のみを考えることにする。さらに、摂動解を得るために $\tilde{\varphi}, \tilde{\eta}$ を次式に示す様に摂動項 ε を用いて展開する。

$$\tilde{\varphi} = \varphi_0 + \varepsilon^{1/2} \varphi_1 + \varepsilon \varphi_2 + \dots \quad (2), \quad \tilde{\eta} = \eta_0 + \varepsilon^{1/2} \eta_1 + \varepsilon \eta_2 + \dots \quad (3)$$

式(2),(3)を基礎方程式及び境界条件式に代入し、摂動法を適用して、 $\varepsilon^{1/2}$ までの項を採用すれば、次に示すような解が得られる。 A 及び C を r, θ, t の関数 $A = A(r, \theta, t)$, $C = C(r, \theta, t)$ として、

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= A \quad (4), \quad \eta_0 = -\kappa (A_t + 2h_w \omega_{11} / \omega A), \quad (5), \quad \varphi_1 = -(1/2) (\tilde{z} + \kappa) (A_{tt} + 2h_w \omega_{11} / \omega A_t) + C \quad (6) \\ \eta_1 &= -\kappa \left\{ (\lambda - \kappa^2 / 3) (A_t + 2h_w \omega_{11} / \omega A) - (1/2) \kappa^2 (A_{ttt} + 4h_w \omega_{11} / \omega A_{tt}) + A_r^2 / 2 + A_\theta^2 / 2r^2 - r \cos \theta \cos t \right\} \\ &\quad - \kappa (C_t + 2h_w \omega_{11} / \omega C) \quad (7) \end{aligned}$$

A 及び C の満足すべき非線形微分方程式は $A_{rr} + A_r / r + A_{\theta\theta} / r^2 = A_{tt} + 2h_w \omega_{11} / \omega A_t$ (8)

$$\begin{aligned} C_{rr} + C_r / r + C_{\theta\theta} / r^2 - C_{tt} - 2h_w \omega_{11} / \omega C_t &= (\lambda - \kappa^2 / 3) A_{tt} - \kappa^2 A_{ttt} / 3 + 2A_r A_{rt} + 2A_\theta A_{\theta t} / r^2 + A_t A_{tt} \\ &\quad + r \cos \theta \cos t + 2h_w \omega_{11} / \omega \left\{ (\lambda - \kappa^2 / 3) A_t - 2\kappa^2 A_{tt} / 3 + A_r^2 + A_\theta^2 / r^2 + A A_{tt} + A_t^2 \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

ここに、 $\kappa = H \varepsilon^{-1/4}$, $\lambda = \left\{ (\omega / \omega_{11})^2 - 1 \right\} \varepsilon^{-1/2}$

4. 非線形微分方程式の解 式(8),(9)の解を次のように仮定する。

$$A = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M J_n(\Omega_{nm} r) T_{nm}(t) \cos n \theta \quad (10), \quad C = \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M J_n(\Omega_{nm} r) \bar{T}_{nm}(t) \cos n \theta \quad (11)$$

いま, $J'_n(\mu_{nm})=0$ を満たす根を μ_{nm} とすれば, $\Omega_{nm} = \mu_{nm}/\mu_{11}$ である. なお, $J'_n(\)$ は第 1 種 n 次のベッセル関数であり, $T_{nm}(t), \bar{T}_{nm}(t)$ は時間の関数である. さて, 式(10),(11)を式(8),(9)に代入した後, θ に関する調和関数と r に関するベッセル関数とによって展開し, 得られた式が恒等的に成立しなければならないという条件から $T_{nm}(t), \bar{T}_{nm}(t)$ に関する 2 階の常微分方程式が得られる. ここで, 微分方程式の解 $\bar{T}_{nm}(t)$ が永年項を含まないという条件を課すことによって, まず, 式(8)の A が次式のように定められる.

$A = F_{11} J_1(r) \cos \theta \sin t$ (12) ここに, F_{11} は ω の関数である. 次に, 上式を用いれば, 式(9)から C が

$$C = \sum_{m=1}^M \{J_0(\Omega_{0m} r) \bar{T}_{0m} + J_2(\Omega_{2m} r) \bar{T}_{2m} \cos 2\theta\} + \sum_{m=2}^M J_1(\Omega_{1m} r) \bar{T}_{1m} \cos \theta \quad (13)$$

ここに, $T_{nm} = a_{nm} \sin st + b_{nm} \cos st$, $n=0, 2$ のとき $s=2$, $n=1$ のとき $s=1$ (14) a_{nm}, b_{nm} は ω の関数である. A と C を用いれば, 式(2)~(11)から速度ポテンシャル $\tilde{\phi}$ 及び波高 $\tilde{\eta}$ が得られるから, これを用いて全壁面動水圧 $\tilde{P}$ を算出することが出来る.

5. 数値計算結果及び考察 本論では, 大山¹⁾と若原²⁾が行った実験からそれぞれ 1 CASE づつを取上げて, 実験結果と理論解析結果とを比較して示した. 大山は半径 25 cm の水槽を用いて, これを振動台上に設置し, 水深を 2.5 cm とし, 加振振幅 0.075 cm で 0.9~1.2 Hz に渡って調和波による定常加振実験を行って, 全壁面動水圧を求めた. 結果を理論値と共に図-1 に示した. 数値計算では, 式(10),(11)において $N=2, M=10$ とし, 減衰定数は 1 次 0.013, 2 次以上は 0.003 にとった. なお, 大山は水槽の中心軸を通して振動方向に平行に隔壁を置いた場合と置かない場合とについて実験を行っている. 理論は $N=2$ とした場合の近似であるが, この場合, 動水圧の値を算出するのには $n=1$ の項だけしか関与しない. このように粗い近似であることを考慮し, さらに, 1.05 Hz 近傍に存在するピークを除けば, 両者は比較的良好に一致しているといえる. 1.05 Hz 近傍に存在するピークを表現するためにはより大きな N の値を採用することが必要であると思われる.

若原は半径 24 cm の水槽を用いて, これを振動台上に設置し, 水深 4 cm の場合について, 入力加速度を 1.6 cm/s^2 とし, 調和波による加振実験を行い, $\omega/\omega_{11}=1.0$ のときの壁面波高の時刻歴応答を求めている. 図-2 に実験結果と計算結果とを示した. 両者を比較すると, 波高が負の場合, 理論値は実験値より小さな値となっている. いま, N の値を 2 より大きく取って, より高次振動までを考慮すれば, 理論値の近似の程度はより高くなって, 実験値と理論値との整合性はより改善されることが期待されると云ってもよいであろう.

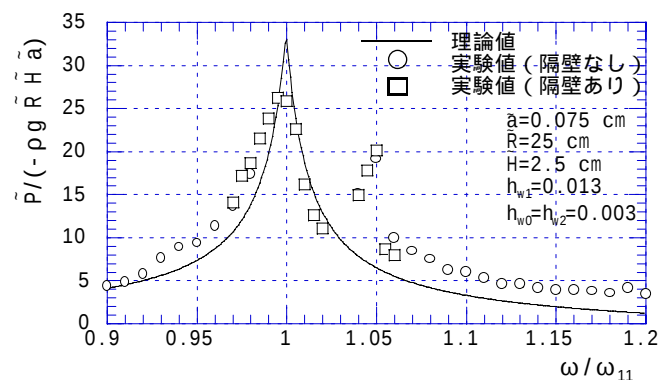


図-1 全壁面動水圧の応答曲線($N=2, M=10$)

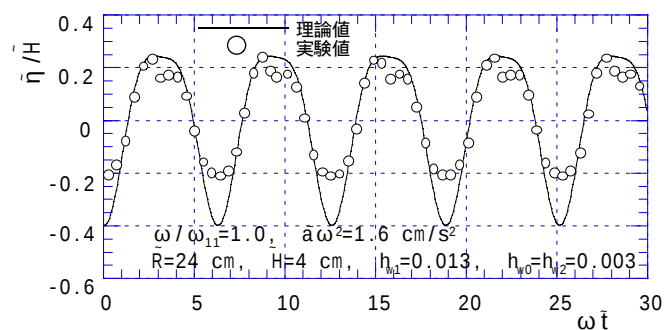


図-2 壁面波高の時刻歴応答($N=2, M=10$)

1) 大山巧: 円筒容器内の非線形スロッシング現象の解析, 土木学会論文集, 第 417 号 / II-13, 1990.5.

2) 若原敏裕: 同調液体ダンパーを用いた構造物の風応答制御に関する研究, 学位論文. 1996.10.