緩勾配方程式の解の特異点の検討

福高総合技術コンサルタント（株）　正会員　中村　修
九州大学大学院　工学研究院　正会員　安達　貴浩

1　はじめに

筆者らは、先に'緩勾配方程式と位相関数について[6]',及び'定常時緩勾配方程式の数値計算式'を発表したが、それらとの関連で同方程式の解の特異点の解析が必要となった。この解析を、線型偏微分方程式論とラグランジュ特異点論の結果を用いて行う。

2　位相関数等の導出の概要

先ず、緩勾配方程式と分散関係式を示す。

$$\partial^2 u/\partial t^2-\nabla(cc_g\nabla u)+\sigma^2(1-n)\,u=0,\quad \cdots\cdots(1),\qquad c=\sigma/k=(g/k\cdot\tanh(g/k))^{1/2},\quad \cdots\cdots(2)$$

ここに、u：水面変動または速度ポテンシャル，c:波速，σ:角周波数，$k=\sigma/c$:波数，n:c_g/c，c_g:群速度，h:水深，等である。また、$x:=(x_1,x_2)$,或は$x:=(t,x_1,x_2)$,等と略記する。

本論では、「uの初期値および(入射)境界値のσは、常に一定値　$\sigma=\sigma_0$　を保つものとし、異なるσのuは重ね合せができる。」という前提の下で解析をおこなう。このとき、解uのσは一定であり、上式は線形変数係数双曲型方程式となり、通常、次の形の解を仮定できる。

$$u(t,x_1,x_2,\sigma)=A(t,x_1,x_2,\sigma)\ \exp(-i\phi_1(t,x_1,x_2,\sigma))+B(t,x_1,x_2,\sigma)\ \exp(-i\phi_2(t,x_1,x_2,\sigma))\ ,\qquad (3)$$

ここに、$A(t,x,\sigma)$、$B(t,x,\sigma)$は振幅関数であり、$\phi_1=\phi(t,x,p,\sigma,t_0,x_0,p_0)$，$\phi_2$，は波$u$の位相関数である。以下では進行波のみを考える。更に、$a(x_1,x_2,\sigma)^2=cc_g$，$k=\sigma/a$,と再定義する。Aは、

$A=a_0+a_1/\sigma+a_2/\sigma^2+a_3/\sigma^3+\cdots$，　(4)，と漸近展開できるものとする。$\phi_1$等を求めるには、式(1)のアイコナル方程式:(5)式を解く必要がある。　$\phi_t+a\sqrt{\phi_{x_1}^2+\phi_{x_2}^2}=0,\cdots$（5）。ここで、

$p_i=\partial\phi_1/\partial x_i,(i=1,2)$，　$\tau=\partial\phi_1/\partial t,\ H=a\sqrt{p_1^2+p_2^2}$,と置いて、式（5)の特性微分方程式より得られるハミルトン正準方程式:(6),(7),(8)，と位相関数ϕ_1の関係式等を書くと次ぎの通り[4]。

$$dx_i/d\,t=\partial H/\partial p_i=ap_i/\sqrt{p_1^2+p_2^2},\cdots(6),\qquad d\,p_i/d\,t=-\partial H/\partial x_i=-\partial a/\partial x_i\cdot\sqrt{p_1^2+p_2^2},\ (i=1,2),\ \cdots(7)$$

$$d\,\tau/d\,t=-\partial H/\partial t=0,\cdots\cdots(8),\qquad d\,\phi_1/d\,t=\sum_{i=1}^{2}p_i\cdot\partial H/\partial p_i+\tau=a\sqrt{p_1+p_2}+\tau=0,\qquad\cdots(9)$$

$$d\,\theta/d\,s=\cos\theta\cdot\partial\theta/\partial x_1+\sin\theta\cdot\partial\theta/\partial x_2=1/a\cdot(\sin\theta\cdot\partial a/\partial x_1-\cos\theta\cdot\partial a/\partial x_2),\qquad(10)$$

$$\phi_1=\int_{x_1(t_0)}^{x_1(t)}p_1\cdot d\,x_1+\int_{x_2(t_0)}^{x_2(t)}p_2\cdot d\,x_2+\int_0^t\tau\cdot dt+\phi_0=\int_{x_1(t_0)}^{x_1(t)}k\cos\theta\,dx_1+\int_{x_2(t_0)}^{x_2(t)}k\sin\theta\,dx_2-\int_0^t\sigma\,dt+\phi_0=const.,\ (11)$$

但し、θ:角度。式（10）を仮定し、その上の式よりx_i,p_i等を求めて、式（9)に代入すれば、ϕ_1が求まる。$ds=a\,dt$を考慮すれば、次の一組の解$\{p_i\}$は、式（6)－(8）を充たすことが解る。

$\tau=p_0=-\sigma,\ p_1=k\cos\theta,\ p_2=k\sin\theta$。$\therefore\phi_1$は式(11)で求まり、$grad_x\phi_1=(-\sigma,k\cos\theta,k\sin\theta)$,である。

3　特異点の検討

アイコナル方程式の特性帯L（式（1）の陪特性帯）は、$t=t_0$で初期帯L_0を通る積分曲線が

作る部分空間であって、底空間 $B=(t,x_1,x_2)$,上の余接ベクトル束 T^*B の部分空間である[4]。

本論では、 L の座標値を, (t,x_1,x_2,p_0,p_1,p_2), と表す。その基底は $\{e_i,dx_i\}$, である。 L の底空間 B への射影 π の像が、(陪)特性曲線 C である。余接ベクトル束 T^*B は、シンプレクティックベクトル空間であり[2]、 L はこの中のラグランジュ部分空間である。故に、 L 上の正準1次形式(リュービル形式)は、 $\omega^1=p_0\cdot dx_0+p_1\cdot dx_1+p_2\cdot dx_2$, となる[2],[8]。次に、式(3)の A を式(4)の形に漸近展開できなくなる点を、通常、解の特異点と呼ぶ。 L は、 B 上の関数 $\phi_1(x,p)$ のグラジィエント写像である[2][8]。 B 上の部分空間 C から T^*B の写像 $\iota=d_x\phi_1:L$, は像 L 上の正準二次形式 ω^2 の引き戻しが、 $\iota^*\omega^2=0$, である時、 B から L へのラグランジュ嵌め込みである。 L から B への射影 $\pi|_L:L\to B$, がラグランジュ写像で、その特異点とは、 π_* のヤコビ行列のランクが下がる点である。それに対応する B 上の点を特異値集合(コースティク)という。厳密な定義は、[2]等を参照されたい。コースティックでは、(陪)特性曲線群が特殊な形状を示すこととなる。文献[5]には、 B 上の正則点では、振幅関数は式(4)の形の漸近展開が可能であるが、コースティック上では漸近展開のオーダーが変わり、式(4)の形の展開は出来なくなる事が示されている。ラグランジュ特異点を調べる一つの簡明な方法は、生成関数(母関数, generating function)に依るものとされる。低次元空間($n\le 4$)におけるラグランジュ特異点は、その生成関数族により分類され、その数も比較的少ない。 $p_i=\partial F/\partial x_i$, $i=0,1,2,\cdots$、と表されるとき、 $F(x,\bullet)$ を(C 或はラグランジュ嵌め込みの)生成関数と呼ぶ。ここで、•はパラメーター(外部変数)である。この定義から見ると、位相関数 ϕ_1 は、(C の)生成関数である。この事は文献[8]の生成関数の構成法に依り直接示す事ができる。但し、 $(k\cos\theta,k\sin\theta)\neq(0,0)$ が条件である。

ϕ_1 を特徴付ける一つの性質は、 B の座標の原点を除いて、次式が成り立つことである。

$d_x\phi_1\neq 0$, $d_p\phi_1\neq 0$。この性質を持つ関数は、陰関数定理から、 $f(t,x_1,x_2)=x_1,\cdots(12)$, と右(R)同値とされる[2]。式(12)と同値な生成関数を持つラグランジュ写像は、特異点を持たない。よって、波の計算モデルとしての緩勾配方程式の解は、特異点を持たないと結論される。

なを、上記は、現実の海の波が特異点を持つ事を否定するものではない事に留意されたい。

参考文献

[1] アーノルド, V. I. (原著):古典力学の数学的方法, 岩波書店, 1980.
[2] 泉屋周一, 他:応用特異店論, 共立出版(株), 1998.
[3] Guillemin, V., S. Sternberg : Geometric asymptotics(rev. ed), A. M. S., 1990.
[4] 小松彦三郎:ベクトル解析と多様体Ⅱ, 岩波講座, 1995.
[5] Duistermaat, J. J. : Comm. P. A. M., vol. 27, pp. 207-281, 1974.
[6] 中村 修:平成9年度土木学会西部支部講演概要集(その1), pp. 306-307.
[7] 灘岡和夫, 他:海岸工学論文集, 第41巻, pp.11-15, 土木学会, 1994.
[8] 藤原大輔:線型偏微分方程式論における漸近的方法Ⅰ&Ⅱ, 岩波講座, 1976-77.