

常時微動に基づく AR モデルによる高精度振動特性推定法の実用化

長崎大学大学院 学生会員 ○中宮義貴

長崎大学工学部 フェロー

岡林隆敏

長崎大学工学部 正会員

奥松俊博

1. はじめに

橋梁が老朽化する時期を迎え、健全度を評価する技術が必要とされている。橋梁の損傷により、振動特性に微細な変化が現れると予測されるため、長期的な振動特性の把握による健全度評価方法が考えられる。本研究は、常時微動に基づき、自動的な振動特性推定を可能とする、高精度構造同定アルゴリズムを開発することを目的とし、シミュレーションにより、その有効性を検証するものである。

2. 橋梁常時微動の表現

有限要素法でモデル化された各節点の応答は、基本座標と振動モードを用いて、 $y(t) = \Phi q(t)$ と表される。基準座標を状態空間表示すると、運動方程式は次式となる。

$$\dot{x}(t) = [q(t) \quad \dot{q}(t)]^T, \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(t), \quad y(t) = Cx(t) \quad (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[\omega_k^2] & -[2h_k\omega_k] \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi^T \end{bmatrix}, \quad C = [\Phi \quad 0] \quad (2)$$

ここに ω_k と h_k は、 k 次振動の固有振動数と減衰定数である。解析対象は、図-1 および表-1 の諸元に示したアーチ橋である。有限要素法によるモード解析により算出した鉛直振動の固有振動数を表-2 に示す。常時微動モデルとして、②～⑧節点に独立な白色雑音を加えて、振動次数を 8 次まで考慮した場合の応答を考える。節点②を着目点とした応答波形を図-3 に示す。

3. AR モデルによる振動特性推定

運動方程式を離散表示すると、次式となる。

$$x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}f(k), \quad x(0) = x_0, \quad y(k) = \bar{C}x(k) \quad (3)$$

この式に、可観測行列 Q を用いて変換すると、ARMA モデル $1)$ で表示することができる。

$$Q = [C \quad CA \quad \dots \quad CA^{n-1}]^T, \quad \text{rank}[Q] = n \quad (4)$$

$$y(k) + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) = e(t) + \sum_{j=1}^{n-1} b_j (k-j) \quad (5)$$

ARMA モデルは無限次数の AR モデルに近似できる。

$$y(k) + \sum_{s=1}^n a_s y(k-s) = e(t) \quad (6)$$

この AR モデルの特性方程式と根の関係は、

$$z^n - \alpha_1 z^{n-1} - \alpha_2 z^{n-2} - \dots - \alpha_n = 0, \quad Z_k = X_{Re}^k \pm iX_{Im}^k \quad (7)$$

である。特性方程式の実数部分 X_{Re} と虚数部分 X_{Im} より固有振動数と減衰定数を推定することができる。

$$h_k \omega_k = (-1/\Delta) \ln \sqrt{X_{Re}^2 + X_{Im}^2}, \quad \omega_k \sqrt{1-h_k^2} = (1/\Delta) \tan^{-1}(X_{Im}/X_{Re}) \quad [\Delta: \text{サンプリング時間}] \quad (8)$$

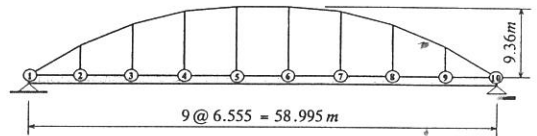


図-1 アーチ橋モデル

表-1 モデルの諸元

形式	補剛橋
支間長 $L(m)$	58.995
ライズ $f(m)$	9.36
補剛桁の断面積 $A_1(m^2)$	2.24×10^{-2}
拱肋の断面積 $A_2(m^2)$	2.24×10^{-2}
曲げ剛性 $EI(kN \cdot m^2)$	1.74×10^4
桁全重量 $W(kN)$	149.74
格間数	9

表-2 固有振動数

	固有振動数 (Hz)
1次	1.742
2次	2.558
3次	4.018
4次	6.355
5次	9.734
6次	13.616
7次	17.607
8次	20.763

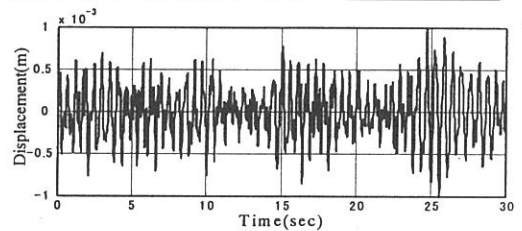


図-3 常時微動モデル

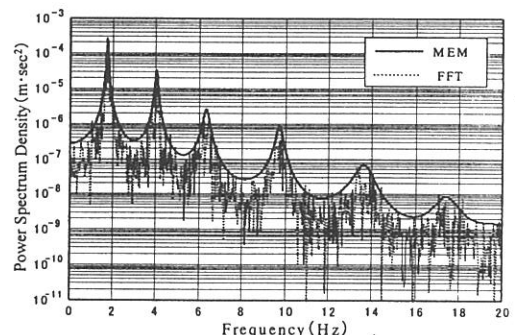


図-4 パワースペクトル密度(MEM,FFT)

4. 構造系振動特性の抽出

AR モデルの次数 n を決定する必要がある。これは図-4 に示すように、AR モデル係数による MEM (最大エントロピー法) と FFT のパワースペクトル密度を比較した際に、良い一致を示していることから、モデル次数の妥当性が判断できる。

(I) 物理的特性による推定

AR モデルによる固有値を複素平面上で示したものの (回数 $m=100$) が図-5 である。変動の少ないものが構造系の固有値に対応するものである。複素平面において、根の絶対値 r_c と角度 θ_c は、(8)式より振動数 ω_c 、減衰定数 h_c 、サンプリング時間 Δ を用いて次式で表せる。

$$r_c = e^{-h_c \omega_c \Delta}, \quad \theta_c = \sqrt{1 - h_c^2} \omega_c \Delta \quad (9)$$

この ω_c および h_c を上限として考慮し、範囲制限にて構造系の固有値のみを抽出することにより振動数を算出する。固有値の存在範囲の概要を図-6 に示す。

(II) 変動消去アルゴリズムによる推定

変動の少ない振動数のみを抽出する手法として、前回の振動数を基準に、変動の大きい推定値を消去する方法を考える。変動が小さく生存して残る振動数の存在範囲は、

$$\omega_{l-1k}(1-\varepsilon) \leq \omega_{lk} \leq \omega_{l-1k}(1+\varepsilon) \quad (10)$$

で表現される。このアルゴリズムの概要を図-7 に示す。

5. 推定振動数の精度

手法(I)により推定した振動数の軌跡 ($n=50$, $\omega_c=19$, $h_c=0.05$) を図-8 に、手法(II)による推定振動数の軌跡 ($n=50$, $\varepsilon=5\%$) を図-9 に示す。また、手法(I)において、異なる次数 ($n=30$, $n=50$) での精度比較を表-3 に示す。これらの結果より、2つの手法は、ともに安定して精度の高い推定が可能であることがわかる。また、次数を上げれば精度が高くなるが、外乱の固有値も多くなるために、構造系固有値の抽出が難しくなる。そのため現場計測においては、その構造物に適合する次数の決定が必要となる。

5. まとめ

(1) AR モデルによる振動特性推定手法として、物理的特性および変動消去アルゴリズムによる2手法を提案した。

(2) 本手法の有効性をシミュレーションにより確認し、高精度の推定が可能であることを示した。

(3) 実橋梁に適用することで、計測器を設置するだけで、自動的な振動数推定が可能となると考えられる。

参考文献 1) 中溝高好：信号解析とシステム同定，コロナ社，1988.3

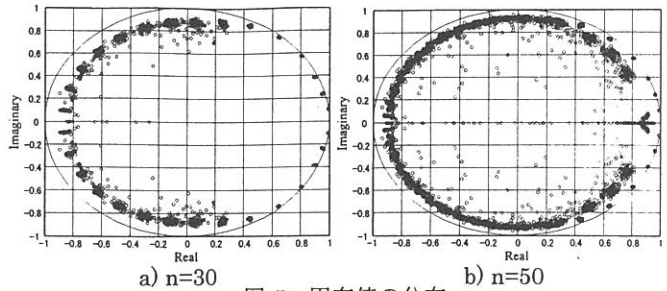


図-5 固有値の分布

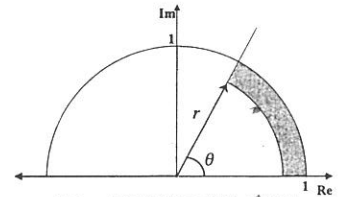


図-6 固有値の存在範囲

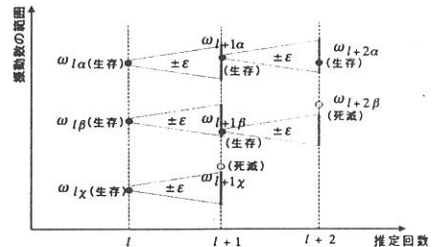


図-7 変動消去アルゴリズムの概要

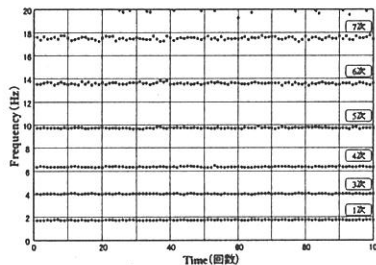


図-8 振動数軌跡(手法I)

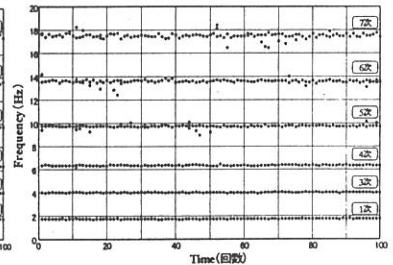


図-9 振動数軌跡(手法II)

表-3 推定値の精度

モデル 振動数 (Hz)	平均値 (Hz)		平均値誤差 (%)		変動係数 (%)	
	n=30	n=50	n=30	n=50	n=30	n=50
1次	1.742	1.6957	1.7392	2.6579	0.1607	1.2797
2次	2.558	2.7249	2.5394	6.5200	0.7271	4.5400
3次	4.018	3.9652	4.0249	1.3141	0.1717	0.7944
4次	6.355	6.4354	6.3722	1.2651	0.2707	0.5703
5次	9.734	9.8253	9.7519	0.9379	0.1839	0.3654
6次	13.616	13.5945	13.6151	0.1579	0.0066	0.3663
7次	17.607	17.3424	17.5194	1.5531	0.5484	0.5449