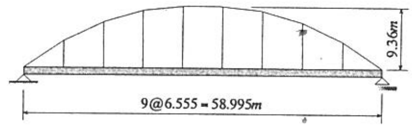
Newmarkβ法で離散化した振動方程式の周波数応答解析

長崎大学工学部　学生会員　○平　貴子　　長崎大学工学部　フェロー　岡林　隆敏
長崎大学工学院　学生会員　木村　啓作　㈱日本構造橋梁研究所　正会員　古川　毅

1．はじめに

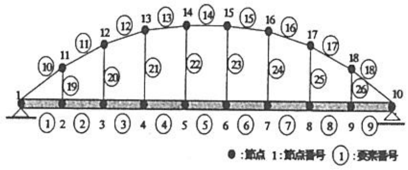
構造物の振動応答シミュレーションを行う場合，Newmarkβ法が一般的に用いられるが，時間刻みの設定により応答値が変化し，振動数にもずれが生じることがある．本研究では，ランガー橋を対象橋梁として，連続系における周波数伝達関数と，Newmarkβ法により離散化された場合の周波数伝達関数とを比較し，時間刻みによるNewmarkβ法の信頼性を評価する手法を提案する．そこで，ランガー橋とその橋梁に車両が走行する場合の周波数伝達関数を計算し，時間刻みΔによる周波数伝達関数の評価を行った．



図－1　ランガー橋一般図

2．対象橋梁と走行車両の諸元

図－1に対象橋梁として用いるランガー橋の一般図を，図－2に構造モデルを，表－1に諸元を，図－3に車両の1自由度系モデルを，表－2に車両諸元を示す．本研究では，ランガー橋構造モデル(図－2)の節点番号2の周波数伝達関数の応答解析を行う．外力作用点および着目点はともに接点番号2である．



図－2　ランガー橋構造モデル

表－1　ランガー橋諸元

形式		補剛桁橋
支間長	$L\ (m)$	58.995
ライズ	$f\ (m)$	9.36
補剛桁の断面積	$A_1(m^2)$	2.24×10^{-2}
拱助の断面積	$A_2(m^2)$	2.24×10^{-2}
曲げ剛性	$EI(t\cdot m^2)$	1.78×10^3
桁全重量	$W_b(t)$	149.74
格間数		9

3．周波数伝達関数

(Ⅰ)連続系による周波数伝達関数

連続系で記述された運動方程式は，次式で表される．

$$M\ddot{y}(t)+C\dot{y}(t)+Ky(t)=f(t) \tag{1}$$

(1)式の両辺をラプラス変換すると次式を得る．

$$(\mathbf{M}s^2+\mathbf{C}s+\mathbf{K})\mathbf{Y}(s)=\mathbf{F}(s) \tag{2}$$

連続系の周波数伝達関数は，次式により与えられる．

$$\mathbf{H}(s)=\mathbf{Y}(s)/\mathbf{F}(s)=(\mathbf{M}s^2+\mathbf{C}s+\mathbf{K})^{-1} \tag{3}$$

ここで，$s=i\omega$とすると，次式のようになる．

$$\mathbf{H}(i\omega)=(-\mathbf{M}\omega^2+i\omega\mathbf{C}+\mathbf{K})^{-1} \tag{4}$$

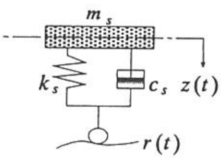
(Ⅱ)Newmarkβ法による周波数伝達関数

Newmarkβ法による変位，速度，加速度は次式で表される．

$$\mathbf{y}_{n+1}=\mathbf{y}_n+\dot{\mathbf{y}}_n h+(1/2-\beta)\ddot{\mathbf{y}}_n h^2+\beta\ddot{\mathbf{y}}_{n+1}h^2 \tag{5}$$

$$\dot{\mathbf{y}}_{n+1}=\dot{\mathbf{y}}_n+(\ddot{\mathbf{y}}_n+\ddot{\mathbf{y}}_{n+1})h/2 \tag{6}$$

$$\ddot{y}_{n+1}=(M+Ch/2+\beta Kh^2)^{-1}\left[-Ky_n-(C+Kh)\dot{y}_n-\{Ch/2+K(1/2-\beta)h^2\}\ddot{y}_n+f_{n+1}\right] \tag{7}$$



図－3　車両モデル

表－2　車両諸元

重量$w(tf)$	20
振動数$f_1(Hz)$	3.0
減衰定数h_1	0.03

この式を用いて，y_{n+1}と$\dot{y}_{n+1}$をy_n，$\dot{y}_n$，$\ddot{y}_n$で表し，ベクトル表示すると次式が得られる．

$$\mathbf{Y}_{k+1}=\mathbf{A}\mathbf{Y}_k+\mathbf{B}f_{k+1} \tag{8}$$

ただし，$Y_n=[y_n\ \ \dot{y}_n\ \ \ddot{y}_n]^T$，$\mathbf{A}$は応答についての係数マトリクス，$\mathbf{B}$は外力についての係数マトリクスである．時間進み演算子をZとすると，$\mathbf{Y}_{k+1}=Z\mathbf{Y}_k$と表されるので，(8)式に代入し，まとめると次式を得る．

$$\mathbf{Y}_k=(Z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}f_{k+1} \tag{9}$$

(9)式の外力f_{n+1}の係数が周波数伝達関数であり$H(Z)=(ZI-A)^{-1}B$となり，$Z=e^{i\omega h}$とおくと次式が得られる．

$$H(i\omega)=(e^{i\omega h}I-A)^{-1}B \tag{10}$$

4．車両が走行する橋梁の周波数伝達関数

車両が走行中である橋梁の運動方程式は次式で表される．ここに$b(t)$は車両設置位置を表すベクトルである．

$$M\ddot{y}(t)+C\dot{y}(t)+Ky(t)=b(t)p(t)=b(t)\{-m_s\ddot{z}(t)\} \tag{11}$$

次に，橋梁上を走行する車両の運動方程式は次式で表される．

$$m_s\ddot{z}(t)+c_s\{\dot{z}(t)-b^T(t)\dot{y}(t)-\dot{r}(t)\}+k_s\{z(t)-b^T(t)y(t)-r(t)\}=0 \tag{12}$$

ここに，$r(t)$と$\dot{r}(t)$は車両直下の路面凹凸とその時間微分である．

(11)，(12)式を合成すると次のようになる．

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m_s \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} C+bb^Tc_s & -bc_s \\ -b^Tc_s & c_s \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} K+bb^Tk_s & -bk_s \\ -b^Tk_s & k_s \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} -bk_s & -bc_s \\ k_s & c_s \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} r \\ \dot{r} \end{Bmatrix} \tag{13}$$

(13)式をベクトル表示すると，次式が得られる．ここに，$r(t)$は，$r(t)$と$\dot{r}(t)$から構成されるベクトルである．

$$M_X\ddot{X}(t)+C_X\dot{X}(t)+K_XX(t)=F_Xr(t) \tag{14}$$

(14)式を Newmarkβ法により(9)式と同様に表すと，次式のようになる．

$$Y_k=(ZI-A)^{-1}BF_Xr(t) \tag{15}$$

3の(Ⅱ)の場合と同様に時間進み演算子Zを用い，$Z=e^{i\omega h}$とすると，次式が得られる．

$$H(i\omega)=(e^{i\omega h}I-A)^{-1}BF_X \tag{16}$$

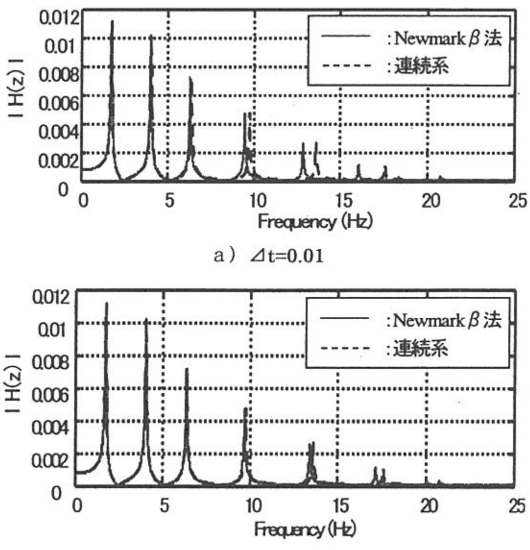
5．数値計算結果と考察

(Ⅰ)連続系と Newmarkβ法の周波数伝達関数

図－4は連続系と Newmarkβ法による周波数伝達関数である．Newmarkβ法の時間刻みを⊿t=0.01(sec)とした場合を図－4 a)に，⊿t=0.005(sec)とした場合を図－4 b）に示す．実線は Newmarkβ法を，破線は連続系を表している．⊿t=0.01(sec)の場合，8Hz 付近までは良い一致が見られるが，それ以降の高周波数領域では，Newmarkβ法を用いると周波数の低い方にずれが拡大していることが分かる．それに対して，⊿t=0.005(sec)の場合，15Hz 付近までは良い一致を示している．以上より，時間刻みを大きくすると高周波数領域で誤差が拡大することが分かる．

(Ⅱ)車両走行がある場合の周波数伝達関数

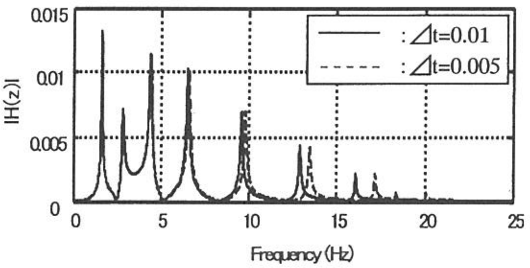
走行車両がある場合の Newmarkβ法による周波数伝達関数を図－5に示す．時間刻みを⊿t=0.01(sec)および⊿t=0.005(sec)として両者を比較した．走行車両の振動数を3Hz に設定したため，3Hz 付近で車両の振動数が発生している．時間刻みを大きくすると，共振振動数が低い領域に移動することが分かる．



a）⊿t=0.01

b）⊿t=0.005

図－4　周波数伝達関数



図－5　走行車両がある場合の周波数伝達関数

6．まとめ

Newmarkβ法において時間刻みを大きくすると，振動数が高くなるに従い連続系よりも低い結果が得られる傾向にある．Newmarkβ法では高次の振動数を得るためには適切な時間刻みを考慮する必要がある．

[参考文献]岡林，岡谷，呉：路面凹凸のモデル化と不規則振動による道路橋交通振動加速度応答解析，構造工学論文集 Vol.47A,pp411-418,2001.3