

有限要素法による単一ケーブルの非線形振動解析

長崎大学工学部 学生会員 ○大淵隆司 長崎大学大学院 学生会員 呉 慶雄
 長崎大学工学部 フェロー会員 高橋和雄 長崎大学工学部 正会員 中村聖三

1. まえがき

TDAPIIIおよびMARCの汎用ソフトウェアでは、吊橋・斜張橋などのケーブル構造の振動解析や耐震解析を行うにあたって、ケーブルの支点変位、係数励振振動、サグの影響などを評価した解析をきちんと行うことができない。そこで、本研究では偏平な水平ケーブルの有限要素法モデルを誘導してプログラムを作成する。次に、有限要素法モデルを用いて、単一ケーブルの静的非線形解析、固有振動解析および非線形振動解析の結果を解析解と比較する。

2. 解法

文献¹⁾を参考に、ケーブルの変位を記述するための局部座標系を図-1に示す。部材の長さ方向に X_1 軸をとり、 Y_1 、 Z_1 軸が直交右手座標系になるようにする。各軸方向における変位を $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ とする。局部座標での剛性マトリクスは以下のように表される。

$$\{\bar{L}\} = \begin{bmatrix} L_0 + \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} \\ L_0 + e & L_0 + e & L_0 + e \end{bmatrix}^T \left(P_0 + \frac{EA}{L_0} e \right) \quad (1)$$

$$e = \sqrt{(L_0 + \bar{u})^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2} - L_0 \quad (2)$$

ここに、 $\{\bar{L}\}$ ：局部座標の内力ベクトル、 e ：伸び。

変形後の荷重ベクトルは次のように表される。

$$\{\bar{F}\} = \{\bar{L}\} \quad (3)$$

式(1)を変位で全微分すると次のように表される。

$$\{\delta \bar{L}\} = [\bar{K}] \{\delta \bar{d}\} \quad (4)$$

ここに、 $[\bar{K}]$ ：全微分して求めた幾何剛性マトリクス、 $\{\delta \bar{d}\}$ ：局部座標の変位を微分したベクトル。

$[\bar{K}]$ は次のように表される。

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \frac{\bar{v}^2 + \bar{w}^2}{(L_0 + e)^3} & -\frac{\bar{v}(L_0 + \bar{u})}{(L_0 + e)^3} & -\frac{\bar{w}(L_0 + \bar{u})}{(L_0 + e)^3} \\ -\frac{\bar{v}(L_0 + \bar{u})}{(L_0 + e)^3} & \frac{(L_0 + \bar{u})^2 + \bar{w}^2}{(L_0 + e)^3} & -\frac{\bar{u}\bar{w}}{(L_0 + e)^3} \\ -\frac{\bar{w}(L_0 + \bar{u})}{(L_0 + e)^3} & -\frac{\bar{v}\bar{w}}{(L_0 + e)^3} & \frac{(L_0 + \bar{u})^2 + \bar{v}^2}{(L_0 + e)^3} \end{bmatrix} P + \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} \frac{(L_0 + \bar{u})^2}{(L_0 + e)^2} & \frac{\bar{v}(L_0 + \bar{u})}{(L_0 + e)^2} & \frac{\bar{w}(L_0 + \bar{u})}{(L_0 + e)^2} \\ \frac{\bar{v}(L_0 + \bar{u})}{(L_0 + e)^2} & \frac{\bar{v}^2}{(L_0 + e)^2} & \frac{\bar{v}\bar{w}}{(L_0 + e)^2} \\ \frac{\bar{w}(L_0 + \bar{u})}{(L_0 + e)^2} & \frac{\bar{v}\bar{w}}{(L_0 + e)^2} & \frac{\bar{w}^2}{(L_0 + e)^2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

全体座標系を考えると変形後の荷重ベクトルは次のように表される。

$$\{F\} = [T]^T \{\bar{L}\} \quad (6)$$

ここに、 $[T]$ ：コードアングルを用いて評価した座標変換マトリクス。

全体座標の幾何剛性マトリクスは式(4)、(5)より次のように表される。

$$\{\delta F\} = [T]^T [\bar{K}] [T] \{\delta X\} \quad (7)$$

ここに、 $\{\delta X\}$ ：全体座標の変位を微分した変位ベクトル。

慣性力と減衰力を考慮すると、運動方程式は次のように表される。

$$[M]\{\ddot{X}\} + [c]\{\dot{X}\} + [T]^T \{\bar{L}\} = \{F\} \quad (8)$$

ここに、 $[M]$ ：ケーブルの集中質量マトリクス、 $[c]$ ：レーリー減衰を用いて評価した減衰マトリクス、 $\{X\}$ ：変位ベクトル。

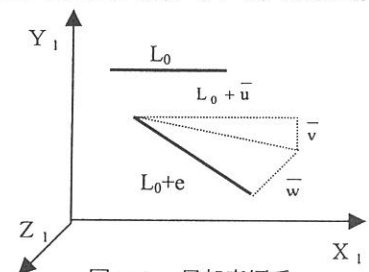


図-1 局部座標系

式(8)を全微分すると増分形の運動方程式は次のように表される。

$$[M]\{\delta\ddot{X}\} + [c]\{\delta\dot{X}\} + [K]\{\delta X\} = \{\delta F\} \quad (9)$$

3. ケーブルの静的非線形解析

図-2に示すようなサグ比 $\gamma=f/L=0.026$ 、縦波-横波伝播速度比 $k^2=EA/H=900$ の偏平な水平ケーブルを解析対象として、中央点に集中荷重が作用する場合の静的非線形解析

を行う。数値解析にはNewton法を用いる。図-3はケーブルの中央点における荷重変位曲線である。縦軸は $\bar{P}=P/mgL$ 、横軸は $\bar{v}=vH/PL$ である。Irvineの結果²⁾と比較すると、鉛直変位 $\bar{v}$ は一致している。

4. 固有振動解析

Subspace法を用いて、固有振動解析を行う。 $k^2=900$ の水平ケーブルの固有振動数を図-4に○印で表す。精度を確認するためにIrvineの結果²⁾を実線で表す。サグ比 $\gamma=0.07$ までは両者が一致しているが、 $\gamma=0.08\sim0.125$ で両者の結果が異なっている。Irvineの方程式²⁾では γ が大きくなっても軸力が変化しないが、本研究では γ が大きくなると軸力が変化することを考慮しているため、差が現れている。

5. 非線形応答解析

図-5に示すような $k^2=900$ の水平ケーブルを解析対象として、非線形時刻歴応答を行う。鉛直分布荷重を次のように表す。

$$\bar{P} = P_0 \sin\{(\Omega/\omega_1)\tau\} \quad (10)$$

ここに、 P_0 : 荷重強度、 Ω : 荷重の円振動数、 ω_1 : ケーブルの第1次固有振動数、 $\tau = \omega_0 t$: 弦の第1次固有振動数で無次元化した時間。

数値解析にはNewmark β 法を用いる。図-6, 7はケーブル中央点の鉛直変位、軸力の時刻歴応答である。Irvineの式²⁾のGalerkin法による結果と比較すると、両者が一致している。

6. まとめ

本研究によって得られた結果をまとめる。本研究で求めた結果をIrvineの結果と比較すると、本研究の結果は妥当と考えられる。本研究の有限要素法のプログラムを用いてケーブルの支点変位、係数励振振動、サグの影響などを評価した解析を行うことができると考えられる。

参考文献

- 1) Broughton, P., Ndumbaro, P.: The Analysis of Cable & Catenary Structures, Thomas Telford Books, 1994
- 2) Irvine, H.M.: Cable Structures, The MIT Press, 1981

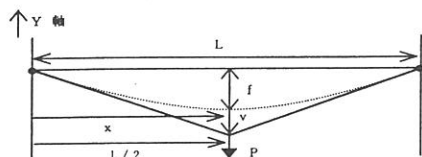


図-2 中央点に集中荷重が作用するケーブル

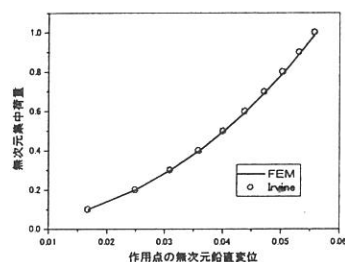


図-3 ケーブル中央点の荷重変位関係

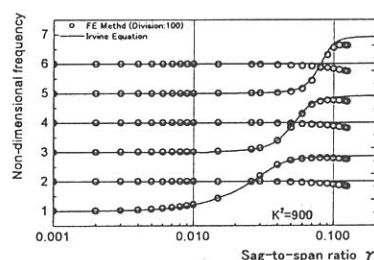


図-4 固有振動数

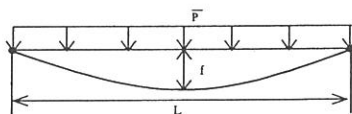


図-5 ケーブルに作用する動的荷重

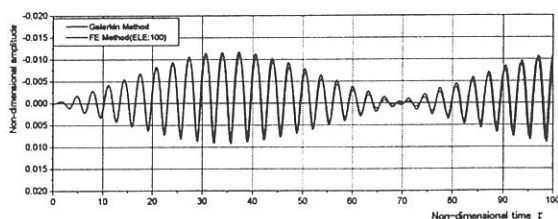


図-6 中央点の鉛直変位の時刻歴応答

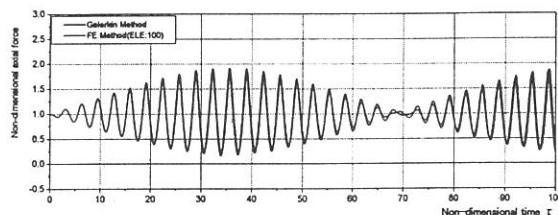


図-7 中央点の軸力の時刻歴応答