高精度３次元要素を用いたフリーメッシュ法

琉球大学　正会員　○伊良波　繁雄・琉球大学　学生会員　松原　仁
琉球大学　正会員　　　　富山　潤・東京大学　非会員　矢川　元基

１．目的

有限要素法（FEM）やフリーメッシュ法[1]（FMM）などの解析法では，その解析精度は使用要素に極めて依存する．特に三次元 FMM においては，その制約条件から四面体一次要素が用いられ，解析対象によっては精度上の問題もある．そこで本論文では，高精度の解を得ることのできる 4 節点四面体要素の定式化を行い，梁の曲げ問題に適用し，本要素の精度について検討した．

２．回転自由度を有する四面体要素

本研究で提案する四面体要素(TET-D)は，一般に FEM 解析において多く使用されている 10 節点アイソパラメトリック四面体要素(TET10)を利用する．高精度な解を得ることのできる TET10 は，四面体の各辺の中間に節点を持つために，直接 FMM へは適用できない．このために，本研究では新たに導入した頂点の回転角を用いて TET10 の中間節点変位を消去した（**図-1** 参照）．具体的には，TET10 の各辺を仮想的に梁要素と仮定し，中間節点変位と頂点の回転角の関係式を利用する．ここで，TET10 上の辺 ij について考える．局所座標系（ij 辺の軸方向を x^* と仮定）での頂点の回転角による x^* 点の変位（$u^*_{x^*,ij}, v^*_{x^*,ij}, w^*_{x^*,ij}$）を梁軸方向に関する 3 次式で仮定すると，次式にて表すことができる．

$$
\begin{aligned}
u^*_{x^*,ij} &= 0 \\
v^*_{x^*,ij} &= -\theta^*_{iz^*} l_{ij}\left(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi\right) - \theta^*_{jz^*} l_{ij}\left(\xi^3 - \xi^2\right) \\
w^*_{x^*,ij} &= -\theta^*_{iy^*} l_{ij}\left(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi\right) - \theta^*_{jy^*} l_{ij}\left(\xi^3 - \xi^2\right)
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

ここで，$\theta^*_{iy^*}, \theta^*_{iz^*}$ 及び $\theta^*_{jy^*}, \theta^*_{jz^*}$ は，局所座標系での i 点及び j 点の各軸周りの回転角を表し，l_{ij} は辺長，ξ は x^* と辺長さとの比（x^*/l_{ij}）を表す．

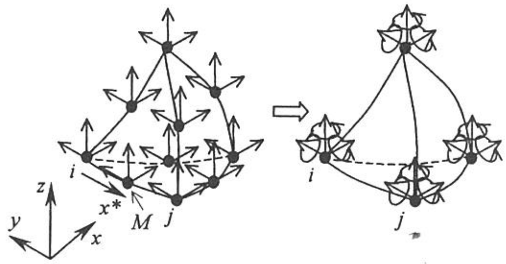

図-1　TET10 と TET-D

式(1)より，ij 辺の中間節点変位（$u^*_{M,ij}, v^*_{M,ij}, w^*_{M,ij}$）は，$\xi = 1/2$ を代入することにより求めることができ，これをマトリックス表示すると次のようになる．

$$
\begin{Bmatrix} u^*_{M,ij} \\ v^*_{M,ij} \\ w^*_{M,ij} \end{Bmatrix}
= \frac{l_{ij}}{8}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \theta^*_{ix^*} \\ \theta^*_{iy^*} \\ \theta^*_{iz^*} \\ \theta^*_{jx^*} \\ \theta^*_{jy^*} \\ \theta^*_{jz^*} \end{Bmatrix}
\qquad (2)
$$

式 (2) は局所座標系での式であるから，左辺は全体座標系での中間節点変位，右辺の回転に関する項は全体座標系での節点の回転 $(\theta_{ix}, \theta_{iy}, \theta_{iz}, \theta_{jx}, \theta_{jy}, \theta_{jz})$ を用いて全体座標系に変換する必要がある．

次に，回転による変位だけでなく，各頂点のもつ各軸方向変位 $(u_i, v_i, w_i, u_j, v_j, w_j)$ も考慮すると，中間節点の変位は全体座標系で次式のように与えることができる．

$$
\begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \end{Bmatrix}
= \begin{Bmatrix} (u_i + u_j)/2 + u_M \\ (v_i + v_j)/2 + v_M \\ (w_i + w_j)/2 + w_M \end{Bmatrix}
\qquad (3)
$$

ここで，u_m, v_m, w_m は全体座標系での中間節点変位，u_M, v_M, w_M は局所座標系での回転による中間節点変位を全体座標系に変換したものである．

TET10の全ての辺における中間節点変位を求め，各頂点に関して重ね合わせることによって，TET10から，回転角を有するTET-Dへの変換が可能となる．

キーワード　アイソパラメトリック要素，回転自由度，定ひずみ要素，フリーメッシュ法
連絡先　　〒903-0129　沖縄県中頭郡西原町字千原１番地　琉球大学工学部環境建設工学科　TEL098-895-8663

$\{\delta'\}$はTET10の変位，$[T]$は変換マトリックス，$\{\delta\}$はTET-Dの変位量とすると，

$$\{\delta'\} = [T]\{\delta\} \tag{4}$$

となる．よって，本要素のひずみエネルギーUは，

$$U = \frac{1}{2}\int_{V^e} \{\delta\}^T [T]^T [B][D][T]\{\delta\} dv \tag{5}$$

と表すことができ，TET-Dの要素剛性マトリックスはTET10の剛性マトリックス$[K']$を用いて，

$$[K] = [T]^T [K'][T] \tag{6}$$

と導くことができる．なお，本要素の形状関数は通常のTET10と同じものであり，また，積分方法についても通常のTET10の場合と変わりはない．ここで，注目すべきことはTET10と比較して，一要素あたりの自由度が6個減少していることである．

3．フリーメッシュ法

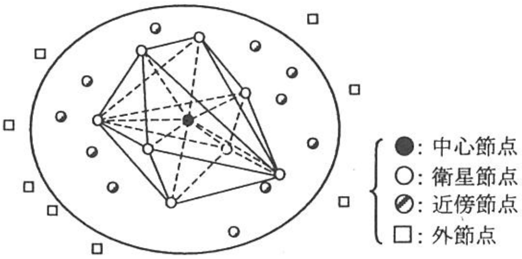

図-2 ローカル要素概念図

FMM は，図-2 に示すように解析領域内に配置された各節点(中心節点)ごとに，その付近の節点(衛星節点)を集めてローカルな領域で一時的に四面体要素を作成する．これらの一時的な四面体要素の要素剛性マトリックスから中心節点に寄与する行成分のみを全体剛性マトリックスに足し合わせる．これを全ての節点で行い，全体剛性マトリックスを作成し，連立一次方程式を解く．このように FMM はローカルな要素生成，全体剛性マトリックスの作成及び求解までをシームレスに行うことができる．

4．精度評価

ここでは，図-3 に示すような片持ち梁の曲げ問題を例題として挙げ，本要素の精度について検討した．図-4 は，片持ち梁自由端のせん断変形を考慮したたわみの理論解（δ_T）[3]と節点数の関係を表している．比較のため，定ひずみ四面体要素による解（TET4）と積分点の数を変えた時の TET-D による解の収束性も同時に示した．

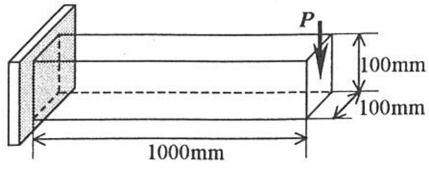

図-3 解析モデル

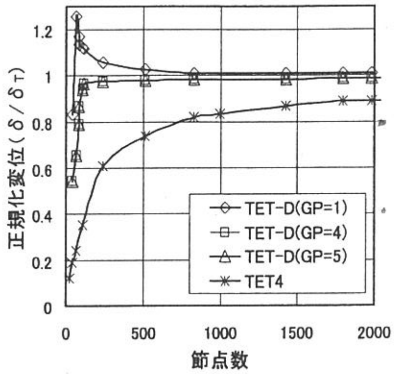

図-4 解の厳密解への収束性

TET4と比較すると，本要素はどの積分点を使用した場合においても，少ない節点数で高い精度を得ており，その収束性も良好である．また，積分点の変化による違いは，4点積分と5点積分を使用した場合の解は，下方から理論解に近づくが，1点積分を使用した場合は，逆に上方から理論解に近づく．しかし，1点積分を用いると計算が不安定になるということがあった．よって，本要素において，安定した解を得るためには，4点積分もしくは，5点積分を用いる方が良いと考えられる．

5．まとめ

本研究では，回転自由度を有する四面体要素を提案し，三次元 FMM に適用することで，既存の三次元 FMM の精度的問題点を解消することができた．

参考文献

1) 矢川元基・細川孝之：フリーメッシュ法の三次元問題への適用，日本機会学会論文集(A編)，64巻，1998
2) 安和守史・伊良波繁雄・富山潤・矢川元基：改良アイソパラメトリック要素を用いた高精度フリーメッシュ法の二次元応力解析への適用に関する研究，コンクリート工学年次論文集，Vol.23，2001
3) S.チモシェンコ：材料力学，東京図書株式会社，1968