

1 次元不飽和浸透流速の差分分解における算定精度について

九州大学 学生会員 内田周輔 九州産業大学 学生会員 松尾哲弘  
 九州大学 正会員 堤 敦 九州産業大学 正会員 細川土佐男  
 九州大学 正会員 神野健二

1. はじめに

不飽和土壌中の水分輸送の解析では、基礎方程式を数値計算し圧力水頭および流速分布が求められるが、透水係数や不飽和浸透特性が著しく異なる地層の境界では、流速分布が不連続になることがある。したがって、浸透流による物質輸送を解析する場合には流速分布を精度よく求める必要がある。

本研究では、浸透特性の異なる2つの土壌に対して、差分近似で必要となる地層の境界での透水係数の処理方法を検討する<sup>1)</sup>。このため定常状態の基礎方程式を直接積分して得られる解と定常状態の差分解とを比較する。

2. 1次元不飽和浸透計算の基礎方程式

1次元不飽和領域における浸透流の基礎方程式は、鉛直下向きにy軸をとると、右式で表される。

$$C_w \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ k(h) \left( \frac{\partial h}{\partial y} - 1 \right) \right\} \quad (1)$$

ここに、 $C_w$ : 比水分容量(1/cm)、 $t$ : 時間(s)、 $h$ : 圧力水頭(cm)、 $k(h)$ : 不飽和透水係数である。なお不飽和透水係数  $k(h)$  は、飽和透水係数  $k_s$  と相対透水係数  $k_r$  を乗じて求められ、比水分容量  $C_w$  と相対透水係数  $k_r$  は不飽和パラメーター  $m, n$  および  $\alpha$  を用いて、次に示す van Genuchten の式により求められる。

$$C_w = \frac{d\theta}{dh} = \frac{-\alpha m(\theta_s - \theta_r)}{1-m} \left[ \frac{1}{1+(\alpha|h|)^n} \right] \left[ 1 - \left\{ \frac{1}{1+(\alpha|h|)^n} \right\}^m \right]^{m-1} \quad (2)$$

$$\theta = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\{1+(\alpha|h|)^n\}^m} \quad (3) \quad k_r = \frac{\{1-(ah)^{-n}\}^{-1} \{1+(ah)^n\}^{-m}}{\{1+(ah)^n\}^{m/2}} \quad (4)$$

3. 計算条件および計算方法

3.1 差分解

式(1)に対してSOR法による差分計算を行う。この場合、地層境界においては透水係数が不連続に大きく変化する可能性があるため、格子点における透水係数の与え方が問題となる。ここでは、格子点の中間点(a, c)における圧力水頭の平均値に対する透水係数を与えた。

次に、境界格子点cにおける断面平均流速については、(I)算術平均、(II)相乗平均、(III)調和平均によるc点の透水係数の与え方を検討した。すなわち、

I. 算術平均;  $k(h_c) = \frac{1}{2}(k(h_1) + k(h_2))$ 、II. 相乗平均;  $k(h_c) = \sqrt{k(h_1) \times k(h_2)}$ 、III. 調和平均;  $k(h_c) = \frac{2 \times k(h_1) \times k(h_2)}{k(h_1) + k(h_2)}$

である。そして、

$$v_c = -k_c \left( \frac{\partial h}{\partial y} - 1 \right)_{y=y_c} \quad (5)$$

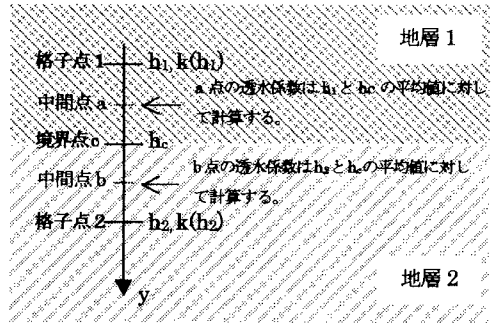
とした。ここでは、十分に一定値に収斂したことを確認できたときの解を差分の定常解とした。差分格子間隔は  $\Delta y = 0.2 \text{ cm}$  である。計算の条件は  $y_0 = 0 \text{ cm}$ ;  $H_0 = 5 \text{ cm}$ ; 地層境界深度  $y_c = 50 \text{ cm}$ ;  $y_L = 100 \text{ cm}$ ;  $H_L = 0 \text{ cm}$  である。

3.2 積分解

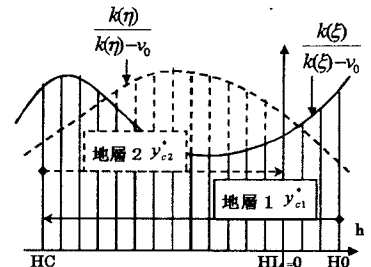
式(1)で左辺=0とおくと、

$$v_0 = -k(h) \left( \frac{\partial h}{\partial y} - 1 \right) \quad (6)$$

となるので、この式を各地層毎に積分する。地層1に対しては、 $y=0$  から  $y_c$



図一 地層境界での差分近似の方法



図二 積分の方法

まで積分すると<sup>2)</sup>、

$$y_c = \int_{H_0}^{h_c} \frac{k(\xi)}{k(\xi) - v_0} d\xi \quad (7)$$

が得られる。ここに  $v_0$  は積分定数 (今の場合は、定常状態での断面平均流速) である。したがって、式(7)において  $v_0$  と  $h_c$  を仮定し、積分を実行すれば仮定した2つのパラメータ ( $h_c, v_0$ ) に対して試行錯誤により式(7)より  $y_c^*$  が求められる。

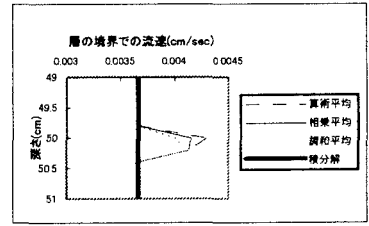
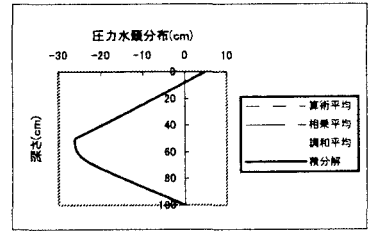
この場合の評価関数を  $J_1 = (y_c - y_c^*)^2$  とする。同様に地層2に対しても

$$y_L - y_c = \int_{h_c}^{H_1} \frac{k(\eta)}{k(\eta) - v_0} d\eta \quad (8)$$

とし、評価関数として  $J_2 = (y_c - y_c^*)^2$  を用いる。ここに、 $y_c^*$  は地層2での ( $h_c, v_0$ ) に対する  $y_c$  の計算値である。以上のように、地層での飽和透水係数および不飽和浸透流のパラメータが変化する場合、 $J_1$  および  $J_2$  を合成した評価関数

$$J = w_1 J_1 + w_2 J_2 \quad (9)$$

を最小とするパラメータの組 ( $h_c, v_0$ ) を求めることになる。なお、今回は台形公式による数値積分を実行した。



$$J_1 = 2.72 \times 10^{-5} \quad J_2 = 9.08 \times 10^{-8}$$

図-3 圧力水頭分布と流速分布 (組合せ3)

#### 4. 計算結果

表-1~2に計算条件を示す。表-1中の①~③は、飽和透水係数のオーダーが異なる点が主な相違点である。

表-1 土の飽和・不飽和特性

| 特性 | ks(cm/s)              | $\theta_s$ | $\theta_r$ | m     | n    | $\alpha(1/cm)$ |
|----|-----------------------|------------|------------|-------|------|----------------|
| ①  | $2.27 \times 10^{-3}$ | 0.33       | 0.058      | 0.715 | 3.51 | 0.0074         |
| ②  | $1.40 \times 10^{-2}$ | 0.282      | 0.033      | 0.863 | 7.29 | 0.0355         |
| ③  | $6.42 \times 10^{-4}$ | 0.355      | 0.025      | 0.390 | 1.64 | 0.0032         |

表-2 地層の組合せ

|     | 組合せ1 | 組合せ2 | 組合せ3 |
|-----|------|------|------|
| 地層1 | ①    | ③    | ③    |
| 地層2 | ②    | ②    | ①    |

#### 5. 考察とまとめ

表-3および図-3からわかるように、圧力水頭に関しては大きな誤差は見られないものの、定常差分解においては地層を挟んで断面平均流速が不連続に変化する。これは前述したように、地層境界での透水係数の処理方法によっては、必ずしも断面平均流速が連続して得られないことを意味する。積分解に近い断面平均流速が求められているのは、何れの組合せにおいても、調和平均を用いた場合である。さらに、断面平均流速については、差分解が不連続になることに対して、積分解ではほぼ連続的に算定できることがわかった。一方、差分計算を行う場合の地層境界での透水係数の処理については、調和平均が積分解と近い断面平均流速を与えることわかったので、非定常計算においても調和平均処理をする方が良いのではないかと考えられた。今後は、定常流に対して飽和状態の地層と不飽和状態の地層との間の物質輸送計算を実行する予定である。

表-3 地層境界前後の流速分布の計算値 (単位はcm/s)

|      | 積分解                    | 差分解                     |                         |                         |
|------|------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
|      |                        | I. 算術平均                 | II. 相乗平均                | III. 調和平均               |
|      | $v_0$                  | $v_1$                   | $v_2$                   | $v_2$                   |
| 組合せ1 | $3.664 \times 10^{-3}$ | $4.295 \times 10^{-3}$  | $4.150 \times 10^{-3}$  | $4.130 \times 10^{-3}$  |
|      | 誤差                     | 17.22%                  | 13.26%                  | 12.72%                  |
| 組合せ2 | $8.944 \times 10^{-4}$ | $11.884 \times 10^{-4}$ | $10.910 \times 10^{-4}$ | $10.710 \times 10^{-4}$ |
|      | 誤差                     | 32.87%                  | 21.98%                  | 19.75%                  |
| 組合せ3 | $8.914 \times 10^{-4}$ | $6.000 \times 10^{-7}$  | $13.731 \times 10^{-4}$ | $12.012 \times 10^{-4}$ |
|      | 誤差                     | 99.93%                  | 54.04%                  | 34.75%                  |

#### 6. 参考文献

- 1) Genevieve Segol : Classic Groundwater Simulations, Proving and Improving Numerical Models, PTR Prentice Hall, 1994
- 2) Daniel Hillel : 土壌物理学概論—土と水の科学—, 養賢堂, 1984