# マルコフ・モデルにおける仕事量に関する一考察

鹿児島大学大学院　学生員○荒木　功平
鹿児島大学大学院　学生員　酒匂　一成
鹿児島大学工学部　正会員　北村　良介

## 1.はじめに

土の応力～ひずみ関係の解明を目的とした理論的、実験的研究が数多く行われてきている。これらの研究は二つに大別できる。一つは現象論的あるいは巨視的アプローチといわれ、弾塑性理論を援用するものである。もう一つは物性論的あるいは微視的アプローチといわれ、粒子や間隙流体の運動にもとづいて構成関係を導こうとするものである。北村は物性論的立場に立ち、マルコフ過程を適用して、砂質土のような粒状体のせん断挙動の解析を行うマルコフ・モデルと称する粒状体の力学モデルを提案している[1]。マルコフ過程を支配する基礎方程式は、放物型偏微分方程式であり、原理的には非定常現象である圧密、透水挙動に対しも適用が可能である。本報告では，マルコフ・モデルで重要な役割を果たしている仕事量について考察を加えている。

## 2.モデルの概要

マルコフ・モデルは、不規則な形状・寸法の粒子からなる粒状土の三次元の応力場における応力—ひずみ関係を解析するものである。このモデルでは状態変数として粒子接点角 $\eta$ を用いる。ここで粒子接点角とは、図-1 に示すように粒子接点における接平面が直交座標軸となす角としている。せん断過程での粒子の挙動は、確率分布で与えた初期粒子接点角分布をもつ粒子接平面が、せん断の推移とともに潜在すべり面に平行になるように指向するという仮説を導入して、マルコフ・モデルの基礎方程式の係数（*drift vector* と *diffusion tensor*）を決定している。マルコフ・モデルの場合は、パラメータ（*s* に相当するもの）には応力の変化を用い、また状態の遷移過程には剛で変形しない粒子の可逆と非可逆の移動の可能性を定めるポテンシャル障壁の概念を導入している。さらに、ポテンシャル障壁をこえた粒子のうちいくらかは他の径路に落ち込み、落ち込んだ粒子のいくらかは側方径路へ割り込むとしている。このような不連続運動の生起確率はマルコフ過程とは独立に求め、マルコフ過程と連立させて応力～ひずみ関係を導いてきている。確率変数の外力による変化が求められると、統計的考察にもとづいて巨視的な物理量であるひずみが求まる。以上のマルコフ・モデルのフローを図-2 に示している。三次元マルコフ・モデルの基礎方程式は、(1)式のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial s}\omega(\eta,s)=-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\beta_i}\left\{A_i(\eta,s)\cdot\omega(\eta,s)\right\}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial\beta_i^{\,2}}\left\{B_{ii}(\eta,s)\cdot\omega(\eta,s)\right\}\quad(1)$$

$$A_i(\eta,s)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\beta_{i,s+\Delta}-\beta_{i,s}\right)\cdot P\left(\eta_s,\eta_{s+\Delta}\right)d\beta_1 d\beta_2\quad(2)$$

$$B_{ii}(\eta,s)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{2\Delta}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\beta_{i,s+\Delta}-\beta_{i,s}\right)^2\cdot P\left(\eta_s,\eta_{s+\Delta}\right)d\beta_1 d\beta_2\quad(3)$$

*s*：応力状態を表す。
$\omega(\eta,s)$：応力状態変化に伴う接点角分布を与える確率密度関数，
$A_i(\eta,s)$：接点角変化量の平均（*drift vector*），
$B_{ii}(\eta,s)$：接点角変化量の二乗平均（*diffusion tensor*），
$P(\eta_s,\ \eta_{s+\Delta})$：接点角変化の遷移確率。

ただし、応力状態 *s* として、せん断過程ではせん断垂直応力比を、圧縮過程ではせん断垂直応力比 $\tau_{oct}/\sigma_m$ が一定であるので、平均有効応力 $\sigma_m$ をとっている。

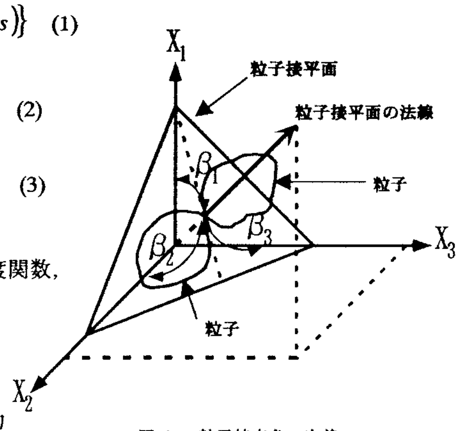



図-1　粒子接点角の定義

## 3.考察

粒状体の応力～ひずみ関係を求めるためには、粒状体になされた仕事量を既知量とする必要がある。せん断・圧縮過程ともに仕事量と合応力の間には模式的に図-3 に示されるような、圧縮とせん断で傾きの異なる線形関係があることがせん断・圧縮試験によって明らかにされている[1]。(4)、(5)式はせん断過程、圧縮過程における仕事量 $W$ ～合応力$(\sigma_m^2+\tau_{oct}^2)$ 関係を表したものである。

$$\log_{10} W = a_s + d_s \cdot \log_{10}\left(\sigma_m^{\ 2} + \tau_{oct}^{\ 2}\right) \qquad (4)$$

$$\log_{10} W = a_c + d_c \cdot \log_{10}\left(\sigma_m^{\ 2} + \tau_{oct}^{\ 2}\right) \qquad (5)$$

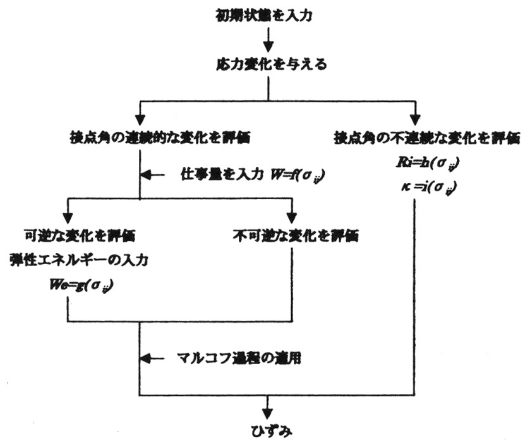



図-2 マルコフ・モデルのフローチャート

ここで、図-3 に示すように $a_s$, $a_c$ はせん断過程、圧縮過程における直線の縦軸切片を表し、$d_s$, $d_c$ はせん断過程、圧縮過程における直線の傾きを表している。図-3 は等方圧縮を含む応力比一定圧縮では、応力比に依存せず、1 本の直線をたどり、せん断へ移行すると別の傾きが大きくなる直線へと移行することを示している。

図-4(b)は $W \sim \sigma_m \sim \tau_{oct}$ 空間に描かれたエネルギー曲面を示し、図-4(a)は等方圧縮せん断、図-4(c)は応力比一定せん断における仕事量～応力関係を表している。$W \sim \sigma_m \sim \tau_{oct}$ 空間では、応力比が一定の圧縮曲面が最も外側にあり、その内側に相似なせん断曲面が重なって存在していることを示している。この曲面は塑性論における塑性ポテンシャル曲面に対応しているものと考えられる。(4), (5)式は、この $W \sim \sigma_m \sim \tau_{oct}$ 空間を 2 次元へ投影するための 1 つの表現法であり、式中のパラメータを決めるためには、少なくとも一つの供試体による圧縮・せん断試験をおこなう必要がある。ただし、$d_c$ は圧縮時の応力比には依存せず、初期間隙比に依存し、$d_s$ は拘束圧に依存せず初期間隙比に依存するものと考えられる。これらの係数が地盤材料の物理特性と一義的に関連づけられれば、マルコフ・モデルにとって有用なものとなる。

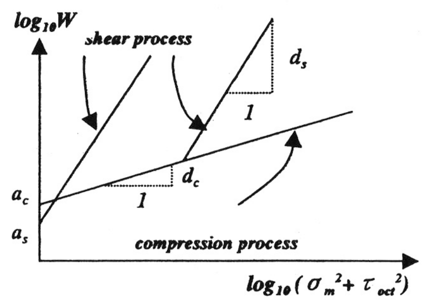
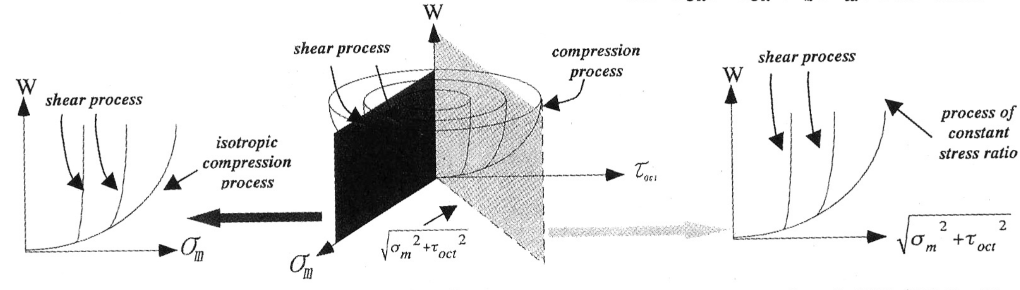



図-3 $\log_{10}W \sim \log_{10}(\sigma_m^2+\tau_{oct}^2)$ 関係の模式図

## 4.おわりに

本報告では，マルコフ・モデルで重要な役割を果たしている仕事量について考察を加えた。今後は(4), (5)式の妥当性を検証するために種々の試験条件でのデータの蓄積が必要である。




(a) $W \sim \sigma_m$ 関係（等方圧縮）　(b) エネルギー曲面　(c) $W \sim (\sigma_m^2+\tau_{oct}^2)$ 関係（応力比一定）

図-4 $W \sim \sigma_m \sim \tau_{oct}$ 空間の模式図

【参考文献】1) 北村良介：マルコフ過程を用いた粒状体の力学モデル,科研費報告書（課題番号：60550355）,1987.3