

薄肉偏平殻の多自由度系としての非線形振動特性の解析

長崎大学大学院 学生会員 ○田中利志 長崎大学工学部 フェロー会員 高橋和雄
長崎大学工学部 正会員 中村聖三

1. まえがき

ケーブル, 偏平アーチ, 殻などのようにライズをもつ構造物には, 構造形状に起因する2次の非線形項が存在するために, 各種の分岐現象が存在する。著者らは, 曲率が大きい領域まで取り扱い可能な薄肉殻構造を対象に非線形振動解析を行い, 非線形振動特性と各種の偏平殻の形状パラメーターの影響を明らかにしつつある¹⁾。本研究では, 薄肉偏平殻の非線形運動方程式を多自由度系に近似して, 調和バランス法による非線形振動特性解析を行い, 偏平殻の形状, 各種の面内・面外の境界条件のもとに, 偏平殻の非線形振動特性を明らかにする。数値解析において多自由度系としての固有振動数解析および高次モードの非線形振動特性を各種のパラメーターのもとに明らかにする。

2. 運動方程式および境界条件

図-1に示す薄肉偏平殻を対象とする。

薄肉偏平殻のたわみを w とすると, 殻の非線形運動方程式と適合条件式は, 次式で表わされる²⁾。

$$D\nabla^4 w - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R_x} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p_0 \cos \Omega t = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{Ed} \nabla^4 F - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

ここに, t : 時間, d : 板厚, ρ : 板の密度, p : 荷重強度, F : Airy

の応力関数, $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$, $D = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)}$,

ν : ポアッソン比, E : ヤング率, Ω : 加振円振動数。

殻の境界条件は, 曲げに対して4辺単純支持(S), および4辺固定支持(C)とし, 面内変位 u , v は自由(1)もしくは固定(2)とする。

3. 解法

式(1)のたわみを境界条件を考慮し多自由度として, 次のように仮定する。

$$w = \sum_i \sum_j T_{ij}(t) X_i(x) Y_j(y) \quad (3)$$

ここに, $T_{ij}(t)$: 未知の時間関数, $X_i(x)$, $Y_j(y)$: 面外の境界条件を満足する関数

応力関数 F は, 式(3)を用いて式(2)を解き, 面内方向の境界条件を考慮して得られる。

運動方程式(1)に式(3)および得られた応力関数 F を代入して, Galerkin法を適用し, 1次モード T_{11} と任意の1個の高次モード(1次以外のモード) T_{ij} を選ぶと, 運動方程式(1)は次のような時間に関する2自由度系の非線形常微分運動方程式に近似できる。

$$\begin{aligned} \ddot{T}_{11} + 2h_{11}\omega_{11}\dot{T}_{11} + \omega_{11}^2 T_{11} + a_1 T_{11}^2 + a_2 T_{ij}^2 + a_3 T_{11}^3 + a_4 T_{11} T_{ij}^2 &= a_5 p \cos \omega \tau, \\ \ddot{T}_{ij} + 2h_{ij}\omega_{ij}\dot{T}_{ij} + \omega_{ij}^2 T_{ij} + b_1 T_{11} T_{ij} + b_2 T_{ij}^3 + b_3 T_{11}^2 T_{ij} &= \delta_{ij} b_4 p \cos \omega \tau \end{aligned} \quad (4)$$

ここに, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4$: 係数, h_{11}, h_{ij} : 減衰定数, ω_{11}, ω_{ij} : 無次元固有円振動数

δ_{ij} : Kronecker のデルタ関数, $\bar{p} = p_0 R_x / Ed\pi^2$: 荷重強度, $\omega = \Omega / \omega_0$: 無次元加振円振動数, $\tau = \omega_0 t$: 無次元時間, ω_0 : 対応する平板の1次固有円振動数。

上式の解を次のように仮定する。

$$T_{11} = c_0^{11} + c_1^{11} \cos \frac{\omega}{2} \tau + s_1^{11} \sin \frac{\omega}{2} \tau + c_1^{11} \cos \omega \tau + s_1^{11} \sin \omega \tau, \quad T_{ij} = c_0^{ij} + c_1^{ij} \cos \omega \tau + s_1^{ij} \sin \omega \tau \quad (5)$$

ここに, $c_0^{11}, c_1^{11}, s_1^{11}$: 1次モードの付随型の振幅成分, $c_{1/2}^{11}, s_{1/2}^{11}$: 1次モードの分岐型の振幅成分,

$c_0^{ij}, c_1^{ij}, s_1^{ij}$: 高次モードの付随型の振幅成分

式(5)を式(4)に代入して, 調和バランス法を適用すれば連立非線形代数方程式が得られる。これに Newton-Raphson 法を用いて解けば, 振幅成分が得られる。

4. 解析結果

本研究で用いる無次元パラメーターは, $\mu = a/b$ (縦横比), $k = d/R_x$, $e = a/R_x$, $\lambda = R_x/R_y$ (曲率半径比 $\lambda > 0$: ドーム形状, $\lambda = 0$: 円筒形状, $\lambda < 0$: 鞍形状に対応) とする。

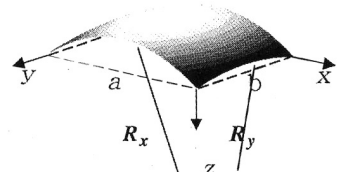
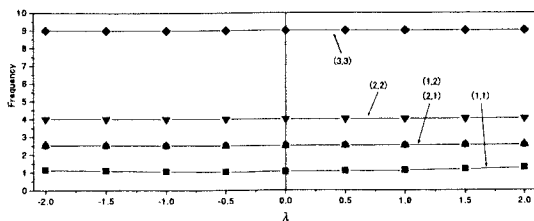
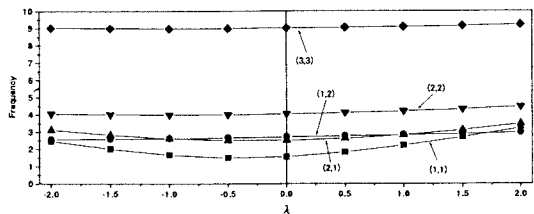


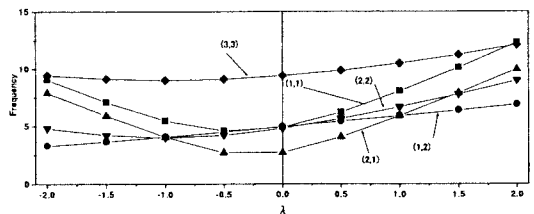
図-1 薄肉偏平殻の一般形状及び座標系



(a) $e=0.1$



(b) $e=0.2$



(c) $e=0.4$

図-2 固有振動曲線 ($\mu=1.0$, $k=0.005$, S-2)

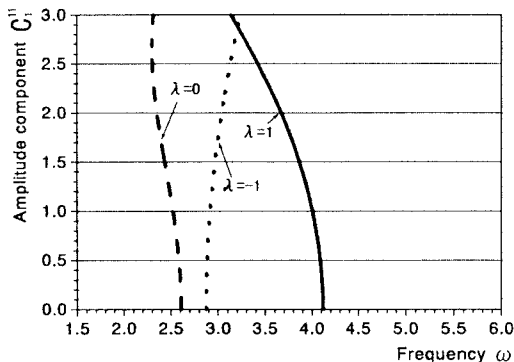


図-3 1次振動の非線形自由振動 (S-2)

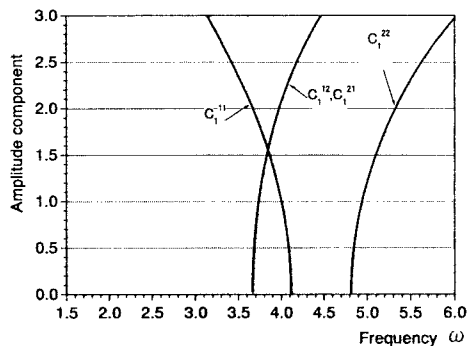


図-4 非線形自由振動 ($\lambda=1$, S-2)

(1)固有振動特性 1次振動から5次振動までの無次元固有振動数 ω_{ij} と曲率半径比 λ との関係を辺長半径比 $e=0.1$, 0.2 および 0.4 の場合について図-2に示す($\mu=1.0$, $\nu=0.3$, $k=0.005$, S-2)。図中の記号(i, j)は x 方向と y 方向の半波数を示す。殻の形状がきわめて浅い場合($e=0.1$)の固有振動数に及ぼす曲率半径比 λ の影響は小さい。しかし、 e が 0.2 より大きくなると、 λ の影響が効いてくる。1次モードの固有振動数が殻の場合に大きくなるため、この場合、図-2(c)から明らかなように、1次モードの固有振動数よりも高次モードの固有振動数が小さくなることが示されている。また、殻の場合には、固有振動数は面内の境界条件と板厚半径比 k の影響も受ける。

(2)非線形振動特性 式(4)の非線形振動特性を見ると、高次モードの運動方程式に1次モードの単独項が含まれていないので、1次モードの振動によって、高次モードの非線形連成振動は発生しない。しかし、1次モードの非線形運動方程式に高次モードの単独項が入っているために、高次モードの振動によって、1次モードの連成が生ずる。また、高次モードの非線形運動方程式に2次の非線形項 T_{ij}^2 の単独項が含まれていないために、高次モードの非線形振動は振幅の増大とともに振動数が増加する硬化ばね特性をもつことが予想される。

図-3は、 $\mu=1.0$, $\nu=0.3$, $k=0.01$ および $e=0.4$ の場合に対する1次振動の非線形自由振動曲線を曲率半径比 λ をパラメータに示している。縦軸 C_1^{11} は、薄肉偏平殻の中央点の無次元振幅を、横軸 ω は非線形自由振動数である。これらの図より、薄肉偏平殻の1次振動の非線形自由振動特性が、曲率半径比 λ の影響を著しく受けることがわかる。 $\lambda \geq 0$ のとき、振動数が振幅の増大とともに減少する軟化バネ特性を示す振幅領域が存在し、非線形自由振動特性に軟化、硬化ばね特性の共存が見受けられる。 $\lambda < 0$ のとき、硬化ばね特性のみが現われている。図-4に $\lambda=1$ の場合の1次から4次までの非線形自由振動曲線を示す。高次モードは硬化ばね特性を示す。

5. まとめ

殻構造の固有振動特性と非線形振動特性を示したが、高次振動に及ぼすパラメータの影響の評価および境界条件の影響については講演時に発表する。

参考文献

- 1) Takahashi, K. and Midou, S.: Theoretical and Applied Mechanics, Vol.48, 1999.
- 2) Kanazawa, K. and Hangai, Y.: Theoretical and Applied Mechanics, Vol.25, 1977.