三角形サンドイッチ板の曲げ振動解析

長崎大学大学院　学生員　○　林 博樹
長崎大学工学部　正会員　崎山 毅
長崎大学工学部　正会員　松田 浩
長崎大学工学部　正会員　森田千尋

1 緒論

変厚矩形板の基礎微分方程式は変数係数の連立偏微分方程式となるため，その解析解を一般的に求めることはほぼ不可能である．そこで著者らは矩形板を交点の集合体とみなし，離散点において直接的に解析する離散的近似解法[1]を提案し変厚矩形板の曲げおよび振動解析を行っている．

本研究では，サンドイッチ構造を有する三角形サンドイッチ板への離散的近似解法の適用を試み，その実用性について検証する．

2 解析方法

2.1 サンドイッチ板の変形状態

サンドイッチ板は表面材(フェイスプレート)で曲げを，芯材(コア)でせん断を受け持つ構造特性を持つ．このようなサンドイッチ板の変形状態を示すと図1aのようになる．これは図1b(コアのせん断弾性係数G_cが無限大の場合起こる)と図1c(コアのせん断変形によって生じる)に示す変形から構成され，たわみ角に関する式は次のようになる．

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + \gamma_y, \quad \theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_x$$

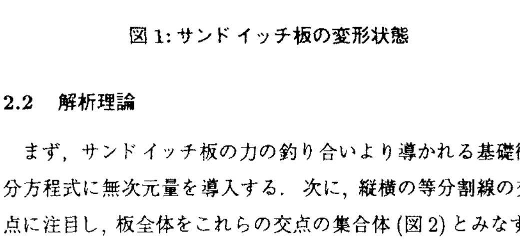

図1: サンドイッチ板の変形状態

2.2 解析理論

まず，サンドイッチ板の力の釣り合いより導かれる基礎微分方程式に無次元量を導入する．次に，縦横の等分割線の交点に注目し，板全体をこれらの交点の集合体(図2)とみなす．そして，これらの離散点における基礎微分方程式の近似解を求めることとする．領域$[i,j]$において面積分したあと，積分方程式に変換し，近似解法を応用すると離散解は次式で表わされる．

$$X_{pij} = \sum_{d=1}^{6}\left(\sum_{f=0}^{i} a_{1pijfd} \cdot X_{rf0} + \sum_{g=0}^{j} a_{2pijgd} \cdot X_{s0g}\right) + q_{pij}$$

ここに，X_{pij}は主要点における無次元化された断面力および変形，X_{rf0}は境界条件より決定される積分定数，a_{1pijfd}，a_{2pijgd}は断面形状を伝えるマトリックス，q_{pij}は荷重項である．

次に自由振動解析を行なうために，単位面積当りの慣性力をとることでサンドイッチ板の曲げ振動に関する運動方程式を得る．これを境界積分方程式に変換し，無次元化を行なうと次式が導かれる．

$$\bar{w}(\eta_0,\zeta_0) = \lambda^4 \sum_{\eta=0}^{m}\sum_{\zeta=0}^{n} \beta_{m\eta}\beta_{n\zeta}\mu\bar{h}\bar{w}(\eta,\zeta)G(\eta_0,\zeta_0,\eta,\zeta)$$

ここに，$\nu=\frac{b}{a}$，$G(\eta_0,\zeta_0,\eta,\zeta)=\frac{D_0}{P}\bar{w}(\eta_0,\zeta_0,\eta,\zeta)$，$\beta_{m\eta}$，$\beta_{n\zeta}$は数値積分による重み係数，$w(\eta_0,\zeta_0)$は点$(\eta_0,\zeta_0)$に単位集中荷重を作用させた時の点$(\eta_0,\zeta_0)$のたわみ，$\bar{w}(\eta_0,\zeta_0,\eta,\zeta)$は点$(\eta_0,\zeta_0)$に単位集中荷重を作用させた時の各点$(\eta,\zeta)$のたわみである．

本解法ではサンドイッチ板に単位集中荷重が作用した場合の矩形板全体のたわみである基本解(グリーン関数)が必要なため，基本解に対する基礎微分方程式を導き，離散的近似解法でたわみを求める．さらに，上式をマトリックス表示し，行列式の値を0にする$1/\lambda^4$を求めることにより固有値が求まる．

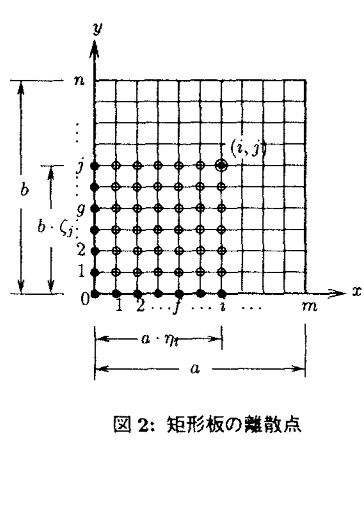

図2: 矩形板の離散点

2.3 三角形板のモデル化

三角形へのモデル化は，図3に示すように，斜辺の境界条件で，自由支持は h_1 部分を h_0 部分より薄くし，$x=m, y=n$ 辺を自由端にする．固定辺の場合は h_1 部分を h_0 部分より厚くし，$x=m, y=n$ 辺を固定端にする．

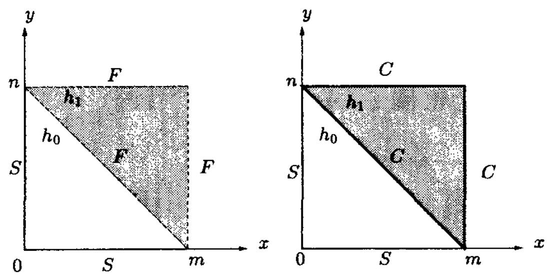

図 3: 三角形のモデル図

2.4 解析モデル

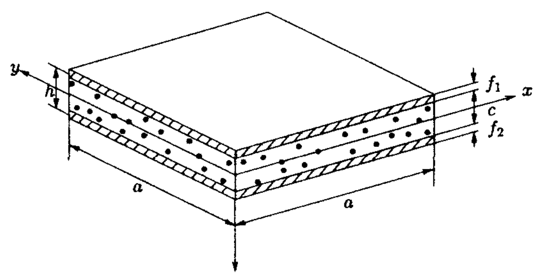

図 4: サンドイッチ板のモデル図

本解析に用いたサンドイッチ板のモデルを図4に示す．a は辺長，f_1 は上フェイスプレートの厚さ，f_2 は下フェイスプレートの厚さ，c はコアの厚さ，$h=c+(f_1+f_2)/2$ はフェイスプレート間の距離としている．

3 解析結果

三角形サンドイッチ板の比較解がなかったため，フェイスプレートとコアの弾性係数比 $s=\frac{a^2 S}{\pi^2 D}$ を無限大に近づけることでせん断変形 $\frac{Q_x}{S}$ をなくし，サンドイッチ板の等質等方性板への近似を行い，等質等方性板の比較解と比べている．また，板厚比が $\frac{h_0}{a}=0.01$ である薄板について解析した．

表1に隣辺単純斜辺自由支持の解析結果を示した．分割数の増加とともに一様に収束し，14,16分割という比較的粗い分割数による解析においても，実用上，十分の精度をもつ解が得られているといえる．さらに，*Richardson* の補外公式により算出した推定収束値は比較解にさらに近づくことが示されている．なお，外部と内部の板厚比を $\frac{h_1}{h_0}=5$ としている．

また，表2に隣辺単純斜辺固定支持の解析結果を示した．外部と内部の板厚比を $\frac{h_1}{h_0}=\frac{1}{5}$ とし，収束値は16,18分割の値を用いている．

表 1: 隣辺単純斜辺自由

$(\lambda=\omega a^2\sqrt{\rho h_0/D_0}, \nu=0.3)$

	解析解				
	m(分割数)				
mode	14	16	収束値	比較解 2)	誤差 (%)
1	3.273	3.255	3.194	3.205	0.34
2	6.252	6.201	6.035	6.025	-0.17
3	8.091	8.024	7.808	7.835	0.34
4	9.702	9.587	9.209	9.210	0.01
5	10.87	10.75	10.35	10.36	0.10
6	13.07	12.90	12.32	12.44	0.96

表 2: 隣辺単純斜辺固定

$(\lambda=\omega a^2\sqrt{\rho h_0/D_0}, \nu=0.3)$

	解析解				
	m(分割数)				
mode	16	18	収束値	比較解 2)	誤差 (%)
1	8.284	8.231	8.031	8.305	3.30
2	11.59	11.46	10.98	11.27	2.57
3	12.57	12.48	12.12	12.73	4.79
4	15.11	14.97	14.44	14.38	-0.42
5	17.25	17.10	16.54	15.58	-6.16
6	19.40	19.22	18.54	17.29	-7.23

4 あとがき

本解法に基づく解析結果と既往の数値解との比較を行なった結果，本解法は三角形サンドイッチ板の曲げ振動解析においても有効であることがいえる．また，サンドイッチ板の力学的特性については講演時に発表予定である．

今後は，三角形だけでなく，種々の形状のサンドイッチ板について解析していく予定である．

参考文献:

1) 崎山　毅・松田　浩: 土木学会論文報告集 第338号 変厚矩形板の曲げの一解析法

2)C.S.Kim and M.Dickinson:The Free Flexural Vibration of Right Triangular Isotropic and Orthotropic Plates-Journal of Sound and Vibration (1990) 141(2),p291-311